Lineární algebra (LA1)

Sbírka neřešených příkladů

1 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Nalezněte obecné řešení níže uvedených soustav rovnic:

(1.1)
$$\begin{aligned}(1+\imath)x+(1-\imath)y &= 1\\ x-\imath y &= 0\end{aligned}$$

(1.2)
$$\begin{aligned}(1-\imath)x+(2+\imath)y &= \imath\\ \imath x-2y &= 1\end{aligned}$$

(1.3)
$$\begin{aligned}(1+2\imath)x+(1-2\imath)y &= 2-\imath\\ -x-\imath y &= \imath\end{aligned}$$

(1.4)
$$\begin{aligned}2\imath x+y &= 1\\ 2x-\imath y &= 1\end{aligned}$$

(1.5)
$$\begin{aligned}\imath x-2\imath y &= 1+\imath\\ x-2\imath y &= 1-\imath\end{aligned}$$

Nalezněte obecné řešení níže uvedených soustav rovnic:

(1.6)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 1\\ x_1+x_2+x_4 &= 0\\ 2x_1+x_2+x_3 &= 2\\ 4x_1+4x_2+2x_3+2x_4 &= 3\end{aligned}$$

(1.7)
$$\begin{aligned}x_1-x_2+2x_3 &= 0\\ x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 2\\ 2x_1-x_2+x_4 &= 1\\ -2x_2+3x_3 &= 1\end{aligned}$$

(1.8)
$$\begin{aligned}-x_2+2x_3+x_4 &= -1\\ x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 1\\ 2x_1+3x_2+x_4 &= 1\\ -x_1-2x_2+x_3+x_4 &= -1\end{aligned}$$

(1.9)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

(1.10)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 1 \end{aligned}$$

Nalezněte řešení soustav lineárních algebraických rovnic se dvěma pravými stranami, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, kde:

(1.11)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(1.12)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.13)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1.14)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(1.15)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 Operace s maticemi

Správně uzávorkujte a vypočtěte výrazy:

(2.1) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

(2.2) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

(2.3) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

(2.4) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

(2.5)
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

(2.6)
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(2.7)
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 01 & \\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

(2.8)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Rozložte čtvercovou matici A na symetrickou a antisymetrickou část:

(2.9)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(2.10)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

(2.11)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(2.12)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2.13)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Vypočtěte inverzní matice k zadaným maticím a výsledek ověřte zkouškou:

(2.14)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

(2.15)
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

3 Lineární vektorové prostory

Rozhodněte, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(3.1) $$\boldsymbol{u} = (1, -1, 2),\ \boldsymbol{v} = (2, 1, -1), \boldsymbol{w} = (1, 0, 1)$$

(3.2) $$\boldsymbol{u} = (1, -1, 2),\ \boldsymbol{v} = (2, 2, 2), \boldsymbol{w} = (-1, -1, -1)$$

(3.3) $$\boldsymbol{u} = (-1, -1, -2),\ \boldsymbol{v} = (-2, -2, -2), \boldsymbol{w} = (-2, 2, 2)$$

(3.4) $$\boldsymbol{u} = (0, -1, -2),\ \boldsymbol{v} = (-1, -1, -2), \boldsymbol{w} = (-1, 0, 0)$$

(3.5) $$\boldsymbol{u} = (2, -2, 1),\ \boldsymbol{v} = (2, 2, 2), \boldsymbol{w} = (-1, -1, 1)$$

Mějme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ :\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Zjistěte výpočtem, zda jsou následující vektory z P_2 lineárně nezávislé:

(3.6) $$p(x) = 3x + 2, \quad q(x) = x^2 - 3x - 1, \quad r(x) = -x^2 + 3x + 3$$

(3.7) $$p(x) = 3x + 2, \quad q(x) = x^2 - 3x - 1, \quad r(x) = -2x^2 + 3x$$

(3.8) $$p(x) = x^2 - x - 1, \quad q(x) = -x^2 + 3x + 2, \quad r(x) = x^2 - 8x + 1$$

(3.9) $$p(x) = 3x^2 + 2x, \quad q(x) = x^2 - 2x - 1, \quad r(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

(3.10) $$p(x) = x^2 + x + 2, \quad q(x) = 2x^2 - x - 1, \quad r(x) = -6x - 10$$

Rozhodněte, zda je $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$, kde:

(3.11) $$\boldsymbol{v} = (0, 2, 0),\ \boldsymbol{x} = (0, -2, 1),\ \boldsymbol{y} = (1, -1, -1),\ \boldsymbol{z} = (1, 1, 2)$$

(3.12) $$\boldsymbol{v} = (-2, 0, -1),\ \boldsymbol{x} = (2, 2, -2),\ \boldsymbol{y} = (-1, 0, 1),\ \boldsymbol{z} = (1, 2, 1)$$

(3.13) $$\boldsymbol{v} = (1, 2, -2),\ \boldsymbol{x} = (2, 0, 2),\ \boldsymbol{y} = (-1, 0, -2),\ \boldsymbol{z} = (0, 0, 1)$$

(3.14) $\boldsymbol{v} = (-2,-2,-1),\ \boldsymbol{x} = (-1,2,1),\ \boldsymbol{y} = (-1,2,1),\ \boldsymbol{z} = (-1,1,1)$

(3.15) $\boldsymbol{v} = (-2,2,2),\ \boldsymbol{x} = (-2,-2,2),\ \boldsymbol{y} = (-2,-2,1),\ \boldsymbol{z} = (0,-1,-1)$

Rozhodněte, zda je $p \in P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ **lineární kombinací** $p_1, p_2, p_3 \in P_2$**, kde:**

(3.16) $p(x) = 2x,\ p_1(x) = -2x+x^2,\ p_2(x) = 1-x-x^2,\ p_3(x) = 1+x+2x^2$

(3.17)
$p(x) = -2-x^2,\ p_1(x) = 2+2x-2x^2,\ p_2(x) = -1+x^2,\ p_3(x) = 1+2x+x^2$

(3.18) $p(x) = 1+2x-2x^2,\ p_1(x) = 2+2x^2,\ p_2(x) = -1-2x^2,\ p_3(x) = x^2$

(3.19)
$p(x) = -2-2x-x^2,\ p_1(x) = -1+2x+x^2,\ p_2(x) = -1+2x+x^2,\ p_3(x) = -1+x+x^2$

(3.20)
$p(x) = -2+2x+2x^2,\ p_1(x) = -2-2x+2x^2,\ p_2(x) = -2-2x+x^2,\ p_3(x) = -x-x^2$

Vypočtěte souřadnice $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ **v bázi** $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$**, kde:**
(3.21)
$\boldsymbol{v} = (-1,-1,-2),\ \boldsymbol{f}_1 = (-1,2,1),\ \boldsymbol{f}_2 = (2,-2,1),\ \boldsymbol{f}_3 = (-2,-1,-2)$

(3.22) $\boldsymbol{v} = (-2,-1,1),\ \boldsymbol{f}_1 = (2,0,0),\ \boldsymbol{f}_2 = (-1,-2,-1),\ \boldsymbol{f}_3 = (-2,2,-2)$

(3.23)
$\boldsymbol{v} = (-1,-1,-2),\ \boldsymbol{f}_1 = (0,-1,1),\ \boldsymbol{f}_2 = (-2,2,-1),\ \boldsymbol{f}_3 = (-2,1,-2)$

(3.24) $\boldsymbol{v} = (2,-1,-1),\ \boldsymbol{f}_1 = (2,-1,-2),\ \boldsymbol{f}_2 = (1,2,-2),\ \boldsymbol{f}_3 = (0,-2,0)$

(3.25) $\boldsymbol{v} = (0,2,2),\ \boldsymbol{f}_1 = (-1,1,1),\ \boldsymbol{f}_2 = (2,2,0),\ \boldsymbol{f}_3 = (1,-2,0)$

Mějme vektorový prostor $P_2 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$**. Vypočtěte souřadnice níže uvedených vektorů** $p(x)$ **a** $q(x)$ **v bázi** $E = \{e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$**:**

(3.26)
$$p(x) = -2x^2 - 2x + 1, \quad q(x) = 2x^2 - x + 13$$
$$e_1(x) = x^2 + x + 1, \quad e_2(x) = -x^2 + x, \quad e_3(x) = -x - 1$$

(3.27)
$$p(x) = 2x^2 - 4x + 2, \quad q(x) = x^2 + 4x - 2;$$
$$e_1(x) = x + 1, \quad e_2(x) = -x + 1, \quad e_3(x) = x^2 - x - 1$$

(3.28)
$$p(x) = -3x^2 + 6x + 5, \quad q(x) = -x^2 + 7x - 1$$
$$e_1(x) = x^2 + 2x + 1, \quad e_2(x) = -2x - 1, \quad e_3(x) = -x^2 + x$$

(3.29)
$$p(x) = -5x - 2, \quad q(x) = -x$$
$$e_1(x) = -x + 1, \quad e_2(x) = x^2 - x - 1, \quad e_3(x) = x + 1$$

(3.30)
$$p(x) = x^2 + x - 2, \quad q(x) = 3x^2 + 3x - 3$$
$$e_1(x) = x^2 + x + 1, \quad e_2(x) = x - 1, \quad e_3(x) = x^2 + x$$

Určete bázi a dimenzi lineárního vektorového prostoru V:

(3.31) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y - z \wedge 2z = x + 2y\}$$

(3.32) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y = z + y \wedge 2x - 3y = x \wedge z - y = 3x - y + z\}$$

(3.33) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}.$$

(3.34) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y = z - 3x \wedge x - z = z - y \wedge -2x + y = 2z\}$$

(3.35) $$V = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$$

Určete bázi a dimenzi lineárního vektorového prostoru V:

(3.36) $$V = \{ax^2 + bx + c \in P_2; a - c = 0 \wedge b = a\}$$

(3.37) $$V = \{ax^2 + bx + c \in P_2; a + 2b - c = 0 \wedge a + b = -b - c\}$$

(3.38) $$V = \{ax^2 + bx + c \in P_2; a + c = 0 \wedge b = c - a\}$$

(3.39) $$V = \{ax^2 + bx + c \in P_2; a + 2b + c = 0 \wedge a + b = -b + c\}$$

Určete, zda je V vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$:

(3.40) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y - z \wedge 2z = x + 2y\}$$

(3.41) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y - z + 1 \wedge 2z = y\}$$

(3.42) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 0\}$$

(3.43) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$$

(3.44) $$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y = z \wedge x - z = z - y \wedge -2x + y = -3z\}$$

4 Lineární zobrazení lineárních vektorových prostorů

Ukažte, že jsou níže zadaná zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární:

(4.1) $$A((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 - x_2 + 5x_3)$$

(4.2) $$A((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

(4.3) $$A((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

(4.4) $$A((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$$

(4.5) $$A((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 - x_3)$$

Je dáno lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované níže uvedenými předpisy, nalezněte jeho hodnotu v zadaném bodě:

(4.6) $$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,-1) \\ A((1,1,1)) &= (1,2) \\ A((0,1,0)) &= (0,-1) \\ A((1,2,-2)) &= ? \end{aligned}$$

(4.7) $$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,1) \\ A((1,1,1)) &= (-1,0) \\ A((0,1,0)) &= (2,-1) \\ A((1,-1,-1)) &= ? \end{aligned}$$

(4.8) $$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,2) \\ A((1,1,1)) &= (1,1) \\ A((0,1,0)) &= (2,1) \\ A((-1,1,2)) &= ? \end{aligned}$$

(4.9) $$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,2) \\ A((1,1,1)) &= (-1,1)) \\ A((0,1,0)) &= (2,-1)) \\ A((2,-2,1)) &= ? \end{aligned}$$

(4.10)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,1) \\ A((1,1,1)) &= (-2,1) \\ A((0,1,0)) &= (1,-1) \\ A((1,2,1)) &= ? \end{aligned}$$

Je dáno lineární zobrazení $A : P_2 \to \mathbb{R}^2$ definované níže uvedenými předpisy, nalezněte jeho hodnotu v zadaném bodě:

(4.11)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,-1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,2) \\ A(x) &= (0,-1) \\ A(1+2x-2x^2) &= ? \end{aligned}$$

(4.12)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (-1,0) \\ A(x) &= (2,-1) \\ A(1-x-x^2) &= ? \end{aligned}$$

(4.13)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,2) \\ A(1+x+x^2) &= (1,1) \\ A(x) &= (2,1) \\ A(-1+x+2x^2) &= ? \end{aligned}$$

(4.14)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,2) \\ A(1+x+x^2) &= (-1,1) \\ A(x) &= (2,-1) \\ A(2-2x+x^2) &= ? \end{aligned}$$

(4.15)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (-2,1) \\ A(x) &= (1,-1) \\ A((1+x)^2) &= ? \end{aligned}$$

Je dáno lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, nalezněte alespoň jeden vektor

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ **vyhovující níže uvedené rovnici:**

(4.16)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,-1) \\ A((1,1,1)) &= (1,2) \\ A((0,1,0)) &= (0,-1) \\ A(\boldsymbol{v}) &= (2,3) \end{aligned}$$

(4.17)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,1) \\ A((1,1,1)) &= (-1,0) \\ A((0,1,0)) &= (2,-1) \\ A(\boldsymbol{v}) &= (2,3) \end{aligned}$$

(4.18)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,2) \\ A((1,1,1)) &= (1,1) \\ A((0,1,0)) &= (2,1) \\ A(\boldsymbol{v}) &= (2,3) \end{aligned}$$

(4.19)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,2) \\ A((1,1,1)) &= (-1,1) \\ A((0,1,0)) &= (2,-1) \\ A(\boldsymbol{v}) &= (2,3) \end{aligned}$$

(4.20)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,1) \\ A((1,1,1)) &= (-2,1) \\ A((0,1,0)) &= (1,-1) \\ A(\boldsymbol{v}) &= (2,3) \end{aligned}$$

Je dáno lineární zobrazení $A : P_2 \to \mathbb{R}^2$, nalezněte alespoň jeden vektor $p \in P_2$ vyhovující níže uvedené rovnici:

(4.21)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,-1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,2) \\ A(x) &= (0,-1)) \\ A(p) &= (2,3) \end{aligned}$$

(4.22)
$$A(1+x) = (1,1)$$
$$A(1+x+x^2) = (-1,0)$$
$$A(x) = (2,-1))$$
$$A(p) = (2,3)$$

(4.23)
$$A(1+x) = (1,2)$$
$$A(1+x+x^2) = (1,1)$$
$$A(x) = (2,1))$$
$$A(p) = (2,3)$$

(4.24)
$$A(1+x) = (1,2)$$
$$A(1+x+x^2) = (-1,1)$$
$$A(x) = (2,-1))$$
$$A(p) = (2,3)$$

(4.25)
$$A(1+x) = (1,1)$$
$$A(1+x+x^2) = (-2,1)$$
$$A(x) = (1,-1))$$
$$A(p) = (2,3)$$

Nalezněte obor hodnot lineárního zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a jeho dimenzi:

(4.26)
$$A((1,1,0)) = (1,-1,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,0,1)$$
$$A((0,1,0)) = (0,-1,0)$$

(4.27)
$$A((1,1,0)) = (2,1,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,-1,1)$$
$$A((0,1,0)) = (1,2,0)$$

(4.28)
$$A((1,1,0)) = (1,2,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,0,2)$$
$$A((0,1,0)) = (0,2,-1)$$

(4.29)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (2,1,-1) \\ A((1,1,1)) &= (1,1,-1) \\ A((0,1,0)) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

(4.30)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (-1,1,1) \\ A((1,1,1)) &= (1,-1,1) \\ A((0,1,0)) &= (1,1,-1) \end{aligned}$$

Nalezněte obor hodnot lineárního zobrazení $A : P_2 \to \mathbb{R}^3$ a jeho dimenzi:

(4.31)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,-1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,0,1) \\ A(x) &= (0,-1,0) \end{aligned}$$

(4.32)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (2,1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,-1,1) \\ A(x) &= (1,2,0) \end{aligned}$$

(4.33)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (1,2,1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,0,2) \\ A(x) &= (0,2,-1) \end{aligned}$$

(4.34)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (2,1,-1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,1,-1) \\ A(x) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

(4.35)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (-1,1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,-1,1) \\ A(x) &= (1,1,-1) \end{aligned}$$

Nalezněte jádro lineárního zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a jeho dimenzi:

(4.36)
$$\begin{aligned} A((1,1,0)) &= (1,-1,1) \\ A((1,1,1)) &= (1,0,1) \\ A((0,1,0)) &= (0,-1,0) \end{aligned}$$

(4.37)
$$A((1,1,0)) = (2,1,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,-1,1)$$
$$A((0,1,0)) = (1,2,0)$$

(4.38)
$$A((1,1,0)) = (1,2,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,0,2)$$
$$A((0,1,0)) = (0,2,-1)$$

(4.39)
$$A((1,1,0)) = (2,1,-1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,1,-1)$$
$$A((0,1,0)) = (1,0,0)$$

(4.40)
$$A((1,1,0)) = (-1,1,1)$$
$$A((1,1,1)) = (1,-1,1)$$
$$A((0,1,0)) = (1,1,-1)$$

Nalezněte jádro lineárního zobrazení $A : P_2 \to \mathbb{R}^3$ a jeho dimenzi:

(4.41)
$$A(1+x) = (1,-1,1)$$
$$A(1+x+x^2) = (1,0,1)$$
$$A(x) = (0,-1,0)$$

(4.42)
$$A(1+x) = (2,1,1)$$
$$A(1+x+x^2) = (1,-1,1)$$
$$A(x) = (1,2,0)$$

(4.43)
$$A(1+x) = (1,2,1)$$
$$A(1+x+x^2) = (1,0,2)$$
$$A(x) = (0,2,-1)$$

(4.44)
$$A(1+x) = (2,1,-1)$$
$$A(1+x+x^2) = (1,1,-1)$$
$$A(x) = (1,0,0)$$

(4.45)
$$\begin{aligned} A(1+x) &= (-1,1,1) \\ A(1+x+x^2) &= (1,-1,1) \\ A(x) &= (1,1,-1) \end{aligned}$$

Nalezněte matici lineárního zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem ke standardním bázím na $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$:

(4.46)
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3)$$

(4.47)
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3)$$

(4.48)
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3)$$

(4.49)
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3)$$

(4.50)
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3)$$

5 Bilineární a kvadratické formy na LVP

Nalezněte matici bilineární formy $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve standardní bázi na $\mathbb{R}^3$, kde:

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 \tag{5.1}$$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 + 2 \tag{5.2}$$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -3u_1v_2 + 6u_2v_1 \tag{5.3}$$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -2u_1v_1 + 5u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 \tag{5.4}$$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 - 3u_1v_2 + 6u_2v_1 - u_1v_3 + 4u_3v_3 \tag{5.5}$$

Nalezněte matice (vybraných) bilineárních forem z předcházejícího příkladu v níže zadaných bázích (pokud zadaná soustava vektorů bází není, vhodně ji doplňte a doplnění zdůvodněte):

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 1), \boldsymbol{e}_3 = (1, 0, 1) \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (1, 2, 3) \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{e}_2 = (1, -1, 1) \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 1), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0) \tag{5.9}$$

Nalezněte matici kvadratické formy $A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve standardní bázi na $\mathbb{R}^3$, kde:

$$A(\boldsymbol{u}) = u_1^2 - 2u_2^2 - 4u_1u_2 + 6u_1u_3 \tag{5.10}$$

$$A(\boldsymbol{u}) = u_3^2 + u_1u_2 - u_1u_3 + u_2u_3 \tag{5.11}$$

$$A(\boldsymbol{u}) = 3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2 \tag{5.12}$$

$$A(\boldsymbol{u}) = u_1u_3 \tag{5.13}$$

$$A(\boldsymbol{u}) = 0 \tag{5.14}$$

Nalezněte matice (vybraných) kvadratických forem z předcházejícího příkladu v níže zadaných bázích (pokud zadaná soustava vektorů bází není, vhodně ji doplňte a doplnění zdůvodněte):

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{e}_3 = (1,0,1) \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{e}_2 = (1,-1,1) \tag{5.16}$$

Klasifikujte následující matice kvadratických forem:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & -1 \\ -3 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

6 Determinanty

Vypočtěte determinanty následujících matic, použijte všechny metody, které pro výpočet determinantu matice 3×3 znáte:

(6.1)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6.2)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6.3)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6.4)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6.5)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte determinanty následujících matic, použijte všechny metody, které pro výpočet determinantu obecné matice znáte:

(6.6)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(6.7)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(6.8)} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(6.9)} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(6.10)} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Skalární součin, ortogonalita vektorů

Zjistěte, zda je bilineární forma $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ skalárním součinem na $\mathbb{R}^3$:

(7.1) $$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

(7.2) $$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

(7.3) $$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$$

(7.4) $$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1$$

(7.5) $$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

Nalezněte všechny vektory kolmé k zadaným vektorům ve standardním skalárním součinu na $\mathbb{R}^n$:

(7.6) $$(1, 1, -2), (1, 0, 1), (1, -1, 1)$$

(7.7) $$(1, 1, -2), (-1, 2, -7), (1, 0, 1)$$

(7.8) $$(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (1, -1, 1, -1)$$

(7.9) $$(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (4, -2, -8, -14)$$

(7.10) $$(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)$$

(7.11) $$(1, -1, 1, -1)$$

Ortonormalizujte následující báze ve standardním skalárním součinu na $\mathbb{R}^3$:

(7.12) $$(1, 1, -2), (1, 0, 1), (0, -1, 1)$$

(7.13) $$(-2, 1, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

(7.14) $$(1,-2,1),(-1,0,-1),(0,1,-1)$$

(7.15) $$(1,1,-2),(1,0,1),(0,-1,1)$$

(7.16) $$(1,1,-2),(1,0,1),(0,-1,1)$$

Určete ortogonální projekci (ve standardním skalárním součinu na $\mathbb{R}^3$) vektoru u do roviny určené vektory v a w:

(7.17) $$\boldsymbol{u}=(1,2,1),\boldsymbol{v}=(1,-1,0),\boldsymbol{w}=(0,1,2)$$

(7.18) $$\boldsymbol{u}=(0,1,-1),\boldsymbol{v}=(1,-1,0),\boldsymbol{w}=(1,1,0)$$

(7.19) $$\boldsymbol{u}=(1,2,1),\boldsymbol{v}=(1,-1,0),\boldsymbol{w}=(1,1,1)$$

8 Vlastní čísla a vektory

Zjistěte, zda jsou vektory $\boldsymbol{e}_k$ vlastními vektory matice $\mathbf{A}$:

(8.1)

$$\boldsymbol{e}_1 = (2,0,1,2), \boldsymbol{e}_2 = (-1,1,-1,-2), \boldsymbol{e}_3 = (2,0,2,0), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(8.2)

$$\boldsymbol{e}_1 = (2,0,1,2), \boldsymbol{e}_2 = (-1,0,-1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,-1,1,0), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(8.3)

$$\boldsymbol{e}_1 = (2,0,1,2), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,0,-1), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(8.4)

$$\boldsymbol{e}_1 = (-2,0,2,0), \boldsymbol{e}_2 = (-1,1,-1,-2), \boldsymbol{e}_3 = (0,-1,1,0), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(8.5)

$$\boldsymbol{e}_1 = (2,0,-2,0), \boldsymbol{e}_2 = (-1,1,-1,-2), \boldsymbol{e}_3 = (0,-2,0,0), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory níže uvedených matic:

(8.6)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(8.7)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(8.8)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(8.9)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(8.10)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Přibližně lokalizujte vlastní čísla níže uvedených matic:

(8.11)
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(8.12)
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(8.13)
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(8.14)
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(8.15)
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

9 Přibližné řešení přeurčených soustav lineárních algebraických rovnic

Nalezněte přibližná řešení níže uvedených soustav rovnic metodou nejmenších čtverců:

(9.1)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - 2y - 2z &= -1 \\ -x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

(9.2)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= -1 \\ -2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

(9.3)
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y - 2z &= -1 \\ -x - y - z &= 0 \end{aligned}$$