

Skalární součin, ortogonalita vektorů

Lineární algebra

lekce 9

Osnova

1. Skalární součin na aritmetických LVP
2. Skalární součin (obecně)
3. Ortogonální matice a transformace

1. Skalární součin na aritmetických LVP

Skalární součin AV

Definice:

Nechť $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jsou dva vektory z \mathbb{R}^n , pak pod jejich *skalárním součinem* budeme rozumět:*

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$

Poznámka:**

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$

Poznámka:

Pro skalární součin vektorů se používají některá další označení:***

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ příp. $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle.$

* Tentokrát se opravdu omezíme jen na reálné prostory, v případě komplexních prostorů by se tato definice i následující tvrzení lišily.

** Podle dohody z lekce 3 je \mathbf{a} sloupcový vektor (matice řádu $n \times 1$) a \mathbf{a}^T vektor řádkový (matice $1 \times n$). Tečkou na úrovni řádku značíme maticové násobení.

*** Označení (\mathbf{a}, \mathbf{b}) využijeme později pro definici skalárního součinu na obecných LVP, symbol „ \cdot “ si vyhradíme pro skalární součin AV.

Eukleidovská norma AV

Pozorování:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$,
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{o} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, \dots, 0)$.

Definice:

Pod *eukleidovskou normou* aritmetického vektoru \mathbf{a} rozumíme:

- $\|\mathbf{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}}$.

Poznámka:

- $\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|$,
- $\|\mathbf{o}\| = 0$,
- eukleidovská norma vektorů kanonické báze je rovna 1 ($\|\mathbf{e}_k\| = 1$).

Vlastnosti skalárního součinu AV

Pozorování: $[a, b, c, o \in \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathbb{R}]$

- $a \cdot b = b \cdot a,$
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c),$
- $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b),$
- $a \cdot a \geq 0, a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = o.$

Poznámka:

Skalární součin není asociativní, výraz $(a \cdot b) \cdot c$ není vůbec definován.

Důsledky pozorování:

- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$
- $a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b).$

Úhel dvou AV

Tvrzení: (Cauchyho – Bunjakovského – Schwartzova nerovnost)

$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|,$

přičemž

- $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \Leftrightarrow$ vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} jsou lineárně závislé (tj. jeden je násobkem druhého).

Důkaz:

- nerovnost
 - $\mathbf{b} = \mathbf{o}$: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{o}| = |\mathbf{0}| = 0, \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{o}\| = \|\mathbf{a}\| \mathbf{0} = 0$, tedy $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{o}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{o}\|,$
 - $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$: $(\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - 2\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \alpha^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \left[\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})} \geq 0$, tedy $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|;$
- rovnost
 - \Leftarrow : necht' např. $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \Rightarrow$
 - $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})| = |\alpha| |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|^2,$
 - $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\|^2;$
 - \Rightarrow : $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \Rightarrow$
 - $\mathbf{b} = \mathbf{o}$: lineárně závislé,
 - $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$: $\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} \right) \cdot \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \mathbf{o}$, tedy opět lineárně závislé.

Úhel dvou AV

Definice:

Pod *úhlem* dvou aritmetických vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující:

- $\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$.

Poznámka:

- $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \in \langle -1, 1 \rangle \wedge \varphi \in \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \varphi = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$.
- Proč kosinus? $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|} = \arccos \frac{\|\mathbf{a}\|^2}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|} = \arccos 1 = 0$ (dle očekávání).
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{0}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{\pi}{2} \quad (\mathbf{a} \perp \mathbf{b})$

Definice:

Řekneme, že dva aritmetické vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou *ortogonální (kolmé)*, právě když $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Pokud navíc tyto vektory splňují $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$, nazveme je *ortonormálními*.

Pozorování:

- Nulový vektor z \mathbb{R}^n je ortogonální ke každému vektoru z \mathbb{R}^n .
- Vektory kanonické báze na \mathbb{R}^n jsou navzájem ortogonální (navíc splňují $\|\mathbf{e}_k\| = 1$, jsou tedy i ortonormální).

Úhel dvou AV

Příklad:

Určete úhel sevřený vektory $\mathbf{a} = (1,2,3)$ a $\mathbf{b} = (3,2,1)$.

Řešení:

- $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \alpha = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$,
- $\cos \alpha = \frac{(1,2,3) \cdot (3,2,1)}{\|(1,2,3)\| \|(3,2,1)\|} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \times \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{10}{14}$,
- $\alpha = \arccos \frac{10}{14} \approx 0,775 \text{ rad} \approx 44^\circ 25'$.

Úhel dvou AV

Příklad:

Nalezněte všechny vektory z \mathbb{R}^3 kolmé k vektorům $\mathbf{a} = (1,2,3)$ a $\mathbf{b} = (3,2,1)$.

Řešení:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$,
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$,
 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0 \rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$,
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t, t \in \mathbb{R} \end{array}$,
- $\mathbf{x} = (1, -2, 1)t \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}((1, -2, 1))$.

Poznámka:

- $\mathbf{a} = (1,2,3)$ a $\mathbf{b} = (3,2,1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$,
- srovnajte s postupem při hledání jádra matice (viz lekce 4, obrazovka 15).

Úhel dvou AV

Pozorování:

- Pythagorova věta:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \implies \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2,$
- $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$

Skalární součin AV v obecné bázi

Tvrzení:

Nechť $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ je báze na \mathbb{R}^n a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mají v této bázi souřadnice $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i$) a $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ($\mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \eta_n \mathbf{a}_n = \sum_{j=1}^n \eta_j \mathbf{a}_j$).

Pak platí:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\eta}$,

kde

- $s_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$.

Důkaz:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i) \cdot (\sum_{j=1}^n \eta_j \mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \underbrace{(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)}_{s_{ij}} \eta_j$.

Poznámka:

V případě

- $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\|\mathbf{a}_i\| = 1$ (*ortonormální báze*, viz následující obrazovka)

platí:

- $\mathbf{S} = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i = \boldsymbol{\xi}^T \cdot \boldsymbol{\eta}$.

Ortogonalní systém, ortogonalní báze

Definice:

Množinu nenulových vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *ortogonalním systémem*, právě když:

- $\forall i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j: \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$.

Pokud navíc tyto vektory ($\forall i = 1, 2, \dots, m$) splňují

- $\|\mathbf{a}_i\| = 1$,

hovoříme o *systému ortonormálním*.

Tvrzení:

Ortogonalní (ortonormální) systém vektorů je tvořen vektory lineárně nezávislými.

Důkaz:

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o} \Rightarrow \forall j = 1, 2, \dots, m: \begin{cases} (\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{o} \cdot \mathbf{a}_j = 0 \\ (\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \alpha_j (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j) \end{cases} \Rightarrow \alpha_j \underbrace{(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j)}_{\|\mathbf{a}_j\|^2 \neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Definice:

Bázi na \mathbb{R}^n sestavenou z ortogonalních (ortonormálních) vektorů nazveme *bází ortogonalní (ortonormální)*.

Pozorování:

Kanonická báze na \mathbb{R}^n je bází ortonormální. (Není to ale jediná ortonormální báze na \mathbb{R}^n !)

Souřadnice vektoru v ortonormální bázi

Tvrzení:

Nechť $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ je ortonormální báze, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ souřadnice vektoru \mathbf{x} v této bázi ($\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i$). Pak platí:

- $\xi_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Důkaz:

- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i$,
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j = (\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = \left\{ \begin{array}{l} i \neq j: \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0 \\ i = j: \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j = 1 \end{array} \right\} = \xi_j$

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Záměr:

Nechť $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ je (obecně neortogonální) systém lineárně nezávislých vektorů z \mathbb{R}^n . Hledáme (aspoň jeden) ortogonální (ortonormální) systém $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ splňující:

- $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)$.

Postup:

- $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \left[\mathbf{b}'_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \right]$,
- $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha_1^{(2)} \mathbf{b}_1$:
 - $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(2)} = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}$,
 - $\mathbf{b}'_2 \rightarrow \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}$, (vektor \mathbf{b}_2 nemůže být nulový, protože pak by vektory \mathbf{a}_1 a \mathbf{a}_2 byly lineárně závislé; platí i níže pro \mathbf{b}_3 atd.)
- $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \alpha_1^{(3)} \mathbf{b}_1 - \alpha_2^{(3)} \mathbf{b}_2$:
 - $\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(3)} = \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}$,
 - $\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2^{(3)} = \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}$,
 - $\mathbf{b}'_3 \rightarrow \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|}$,
- ...

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

- $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \alpha_1^{(k)} \mathbf{b}_1 - \alpha_2^{(k)} \mathbf{b}_2 - \dots - \alpha_{k-1}^{(k)} \mathbf{b}_{k-1}$:
 - $\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(k)} = \frac{\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}$,
 - $\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2^{(k)} = \frac{\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}$,
 - ...
 - $\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_{k-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{k-1}^{(k)} = \frac{\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-1} \cdot \mathbf{b}_{k-1}}$,
 - $\mathbf{b}'_k \rightarrow \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|}$,
- ...
- $\mathbf{b}_m = \dots$

Poznámka:

Takto získané vektory \mathbf{b}_k můžeme průběžně nahrazovat jejich libovolným (nenulovým) násobkem zvoleným tak, aby se numerické výpočty co možná nejvíce zjednodušily.

(Neplatí samozřejmě pro normované vektory \mathbf{b}'_k .)

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Příklad:

Pomocí G-SO ortogonalizujte (ortonormalizujte) zadané vektory z \mathbb{R}^3 : $\mathbf{a}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1)$ a $\mathbf{a}_3 = (0,1,0)$.

Řešení:

- $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,1,0)$, $\left[\mathbf{b}'_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right]$,
- $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha_1^{(2)} \mathbf{b}_1$, kde $\alpha_1^{(2)} = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}$:
 - $\alpha_1^{(2)} = \frac{(0,1,1) \cdot (1,1,0)}{(1,1,0) \cdot (1,1,0)} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0}{1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0} = \frac{1}{2}$,
 - $\mathbf{b}_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \dots = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow (-1,1,2)$, $\left[\mathbf{b}'_2 = \dots = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right]$,
- $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \alpha_1^{(3)} \mathbf{b}_1 - \alpha_2^{(3)} \mathbf{b}_2$, kde $\alpha_1^{(3)} = \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}$ a $\alpha_2^{(3)} = \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}$:
 - $\alpha_1^{(3)} = \frac{(0,1,0) \cdot (1,1,0)}{(1,1,0) \cdot (1,1,0)} = \frac{1}{2}$, $\alpha_2^{(3)} = \frac{(0,1,0) \cdot (-1,1,2)}{(-1,1,2) \cdot (-1,1,2)} = \frac{1}{6}$,
 - $\mathbf{b}_3 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(-1,1,2) = \dots = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow (-1,1,-1)$, $\left[\mathbf{b}'_3 = \dots = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]$,

$$\mathbf{b}_1 = (1,1,0), \mathbf{b}_2 = (-1,1,2), \mathbf{b}_3 = (-1,1,-1); \quad \mathbf{b}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{b}'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \mathbf{b}'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. Skalární součin (obecně)

Skalární součin

Pozorování:

- Všechna tvrzení o skalárním součinu AV od obrazovky 7 dále jsme formulovali / dokázali bez využití předpokladu, že se jedná o AV (uspořádané n -tice reálných čísel),
- využili jsme jen vlastností skalárního součinu AV shrnutých na obrazovce 6,
- všechna výše dokázaná tvrzení tedy zůstanou v platnosti i v případě obecných LVP, na kterých definujeme skalární součin tak, aby měl vlastnosti skalárního součinu AV.

Definice: (axiomy skalárního součinu)

Nechť \mathcal{U} je (reálný) LVP a $(,): \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení splňující $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{U}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ níže uvedené axiomy:

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$,
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$,
- $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Pak toto zobrazení nazveme *skalárním součinem* na \mathcal{U} a zobrazení $\| \cdot \|: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definované předpisem

- $\| \mathbf{a} \| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$

nazveme *normou* indukovanou tímto skalárním součinem.

Skalární součin

Pozorování:

- Skalární součin je symetrická bilineární forma*, jejíž indukovaná kvadratická forma je pozitivně definitní.
- A naopak, každá taková bilineární forma definuje na zadaném LVP nějaký skalární součin.

Poznámka:

Všechna tvrzení uvedená výše pro AV zůstávají v platnosti i pro obecné LVP se skalárním součinem splňujícím axiomy z předchozí obrazovky:

- Cauchyho-Bunjakovského-Schwartzova nerovnost, úhel vektorů,
- maticové vyjádření skalárního součinu v obecné bázi,
- definice ortogonálního / ortonormálního systému vektorů, lineární nezávislost nenulových ortogonálních vektorů, definice ortogonální / ortonormální báze,
- Gramova-Schmidtova ortogonalizační procedura.

* Pozor, platí jen na reálných LVP!

Skalární součin

Příklad:

Nechť $\mathcal{P}_n(a, b)$ je LVP všech polynomů definovaných na intervalu (a, b) maximálně stupně n . Pak

- $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b p(x)q(x)dx$

je skalárním součinem na $\mathcal{P}_n(a, b)$.

Poznámka:

Výše zavedený skalární součin na $\mathcal{P}_n(a, b)$ umožňuje například:

- počítat „úhel“ sevřený dvěma polynomy,
- definovat ortogonální polynomy (na zadaném intervalu),
- provést Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci polynomů,
- definovat normu („délku“) polynomu,
- atd.

Poznámka:

Podobně bychom mohli postupovat i na obecnějších LVP, např. na prostorech všech spojitých funkcí na (a, b) :

- $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx.$

3. Ortogonální matice a transformace

Ortogonalní matice

Definice:

Reálnou (regulární) matici \mathbf{Q} (řádu $n \times n$) nazveme *ortogonalní*, právě když splňuje:

- $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

Pozorování: (původ názvu)

- $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \rightarrow$ sloupce matice \mathbf{Q} chápané jako AV jsou vzájemně ortogonální (nuly mimo diagonálu \mathbf{I}), mají jednotkovou eukleidovskou normu (jedničky na diagonále \mathbf{I}) a navíc tvoří na \mathbb{R}^n ortonormální systém (bázi),
- $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \rightarrow$ pro řádky matice \mathbf{Q} chápané jako AV platí totéž.

Důsledek:

Determinant ortogonalní matice je roven 1, nebo -1 .

Důkaz:

- $\det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{l} \det \mathbf{I} = 1 \\ \det(\mathbf{Q}^T) \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{Q}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\mathbf{Q})^2 = 1.$

Ortogonalní matice

Tvrzení:

Nechť \mathbf{Q} je matice řádu $n \times n$ a $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované předpisem

- $\mathbf{z} = Q(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

Pak matice \mathbf{Q} je ortogonální, právě když $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $Q(\mathbf{x}) \cdot Q(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Důkaz:

- $\mathbf{u} = Q(\mathbf{x}), \mathbf{v} = Q(\mathbf{y}),$

- $\Rightarrow: Q(\mathbf{x}) \cdot Q(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \underbrace{(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

- $\Leftarrow: Q(\mathbf{x}) \cdot Q(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \Rightarrow (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{y} = 0 \ (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{I} = \mathbf{0} \ (*) \Rightarrow \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$

Důsledek:

- Pro zobrazení z předcházejícího tvrzení platí: $\|Q(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.
- Lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované pomocí ortogonální matice zachovává:
 - normu („délku“) vektoru,
 - úhly mezi vektory.

* Viz lekce 7, obrazovka 8. Jak navíc plyne z důkazu uvedeného v této lekci, dokonce by stačilo $\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$, tedy aby zobrazení Q „pouze“ zachovávalo eukleidovskou normu vektoru, ne nutně úhel vektory sevřený (ten už pak bude zachovávat automaticky).

Ortogonalní transformace

Opakování:

Nechť \mathcal{U} je (konečněrozměrný) LVP a $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ je lineární zobrazení prostoru \mathcal{U} sama na sebe. Pak A nazveme *lineární transformací* na \mathcal{U} (viz též lekce 5).

Definice:

Lineární transformaci $Q: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ na konečněrozměrném prostoru \mathcal{U} se skalárním součinem $(,)$ nazveme *ortogonalní*, právě když $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $(Q(\mathbf{x}), Q(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Poznámka:

- Zobrazení $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované na předchozí obrazovce zadává ortogonalní transformaci na \mathbb{R}^n ,
- tedy každá ortogonalní matice řádu $n \times n$ definuje na \mathbb{R}^n ortogonalní transformaci.
- A naopak?

Maticová reprezentace ortogonální transformace

Opakování: (viz lekce 5, část 3: *Maticová reprezentace LZ*)

- \mathcal{U} je (konečněrozměrný) LVP a $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ je lineární transformace na \mathcal{U} ,
- $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ je báze na \mathcal{U} :
 - $\mathbf{x} \in \mathcal{U}: \mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$,
 - $\mathbf{u} \in \mathcal{U}: \mathbf{u} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 + \dots + u_n \mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{a}_i$,
- $\mathbf{u} = A(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad [A(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{a}_i]$.

Tvrzení:

Ortogonální transformaci $Q: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ v ortonormální bázi* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ reprezentuje ortogonální matice \mathbf{Q} .

Důkaz:

$$\bullet \left. \begin{aligned} (Q(\mathbf{a}_j), Q(\mathbf{a}_k)) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases} = (\mathbf{I})_{jk} \\ \left(\sum_{i=1}^n q_{ij} \mathbf{a}_i, \sum_{l=1}^n q_{lk} \mathbf{a}_l \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij} q_{lk} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_l) = \sum_{l=1}^n q_{lj} q_{lk} = (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})_{jk} \end{aligned} \right\} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

* Pozor, obecně pro neortonormální bázi tvrzení neplatí!

SLAR s ortogonální maticí

Pozorování:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde \mathbf{A} je ortogonální matice (řádu $n \times n$, tedy n rovnic pro n neznámých),
- $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$,
- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$.

Poznámka:

Srovnejte s náročností řešení soustavy s (obecnou) regulární maticí:

- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Konec lekce 9.