Determinanty

Lineární algebra

lekce 8

Osnova

1. Determinanty (čtvercových matic) a jejich vlastnosti
2. Výpočet determinantu
3. Vybraná použití determinantů

1. Determinanty a jejich vlastnosti

„Tradiční“ definice determinantu

Definice:

- Nechť $\mathbf{A}$ je matice 1×1 $[\mathbf{A} = (a), a \in \mathbb{R}]^*$, pak pod jejím *determinantem* rozumíme:
  - $|\mathbf{A}| \stackrel{\text{def}}{=} a.$
- Nechť dále je $\mathbf{A}$ je čtvercová matice obecného řádu $n \times n$, pak její determinant definujeme rekurzivním předpisem:
  - $|\mathbf{A}| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} |\mathbf{A}_{1j}|,$

kde $\mathbf{A}_{1j}$ je matice, která z matice $\mathbf{A}$ vznikne vyškrtnutím 1. řádku a *j*-tého sloupce.

Poznámka:

- Pro determinant matice $\mathbf{A}$ se v literatuře používá rovněž označení $\det \mathbf{A}$ [případně $\det(\mathbf{A})$].
- Determinant je definován jen pro čtvercové matice. V dalším budeme tedy předpokládat, že uvažované matice jsou čtvercové.
- Věty a tvrzení vztahující se k determinantům se snadno pamatují, ale ne vždy se dají snadno dokázat. Tam, kde by důkazy byly příliš komplikované, je nebudeme uvádět.

* Opět bychom mohli předpokládat $a \in \mathbb{C}$, veškeré úvahy této lekce by zůstaly v platnosti.

„Tradiční“ definice determinantu

Tvrzení: (Sarrusovo pravidlo)

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$

  $-\qquad +$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$-\qquad +$

Důkaz:

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}a_{22} + (-1)^{1+2}a_{12}a_{21} = \cdots$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \cdots$

„Tradiční“ definice determinantu

Poznámka:

Podobná pravidla lze odvodit i pro výpočet determinantů matic vyšších řádů (*Leibnizova formule*), pro praktické výpočty se ale příliš nehodí – extrémně vysoké počty sčítanců ($n!$ pro matici řádu $n \times n$):

- 24 sčítanců pro matice 4×4,
- 120 pro matice 5×5,
- 720 pro matice 6×6
- atd.

Navíc bychom potřebovali zavést pár dalších pojmů souvisejících s pojmem *permutace n*-prvkové množiny. (Pro zájemce viz zde či zde.)

Vlastnosti determinantu: antisymetrie

Věta:

Nechť matice $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ prohozením dvou (různých) řádků, pak platí

$$|\mathbf{A}'| = -|\mathbf{A}|.$$

Důsledek:

- Má-li matice aspoň jeden řádek nulový, je její determinant nulový. $(\det \mathbf{O} = 0)$
- Má-li matice aspoň dva řádky stejné, je její determinant nulový.

Důkaz:

- nulový řádek můžeme prohodit s prvním a využít definici,
- prohozením dvou stejných řádků se matice nezmění (a tedy ani její determinant), současně determinant změní znaménko, platí tedy $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$.

Důsledek: (rozvoj determinantu podle řádku)

Definici determinantu lze zobecnit na

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

kde i můžeme volit libovolně a $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z $\mathbf{A}$ vyškrtnutím (zvoleného) řádku i a sloupce j.

Vlastnosti determinantu: multilinearita

Věta:

- Nechť matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou stejného řádu a matice $\mathbf{B}$ má všechny řádky až na jeden (i-tý) nulové. Pak platí
$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}'|,$$
kde matice $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ náhradou i-tého řádku nenulovým (i-tým) řádkem matice $\mathbf{B}$.
- Nechť matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ jsou stejného řádu a mají až na jeden (i-tý) stejné řádky, přičemž i-tý řádek matice $\mathbf{A}'$ je α-násobkem i-tého řádku matice $\mathbf{A}$. Pak platí
$$|\mathbf{A}'| = \alpha|\mathbf{A}| .$$

Důkaz:

- stačí provést pro 1. řádek, jinak prohodíme a po provedení odvození prohodíme zpět, změna znaménka: $(-1)\times(-1)=1$,
- $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(a_{1j}+b_{1j})\left|\mathbf{A}_{1j}\right| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\left|\mathbf{A}_{1j}\right| + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}b_{1j}\left|\mathbf{A}_{1j}\right| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}'|$,
- $|\mathbf{A}'| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(\alpha a_{1j})\left|\mathbf{A}_{1j}\right| = \alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\left|\mathbf{A}_{1j}\right| = \alpha|\mathbf{A}|$.

Důsledek:

Chápeme-li řádky matice (čtvercové) matice řádu $n\times n$ jako vektory z $\mathbb{R}^n$, definuje determinant na $\mathbb{R}^n$ (speciální) formu ($|\ |: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Výše uvedená věta říká, že se jedná o formu multilineární, věta z předchozí obrazovky pak, že se jedná o formu (totálně) antisymetrickou.

Vlastnosti determinantu: multilinearita

Důsledek:

Nechť matice $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ náhradou vybraného řádku lineární kombinací jejích řádků, přičemž koeficient stojící v této lineární kombinaci u vybraného řádku je roven α. Pak platí

$$|\mathbf{A}'| = \alpha|\mathbf{A}|.$$

V případě, že $\alpha \neq 0$, platí i $|\mathbf{A}| = \frac{1}{\alpha}|\mathbf{A}'|$.

Důkaz:

- na základě věty z předchozí obrazovky bude $|\mathbf{A}'|$ stejnou lineární kombinací determinantů matic, v nichž příslušný řádek nahradíme řádkem z lineární kombinace,
- pro řádky různé od vybraného (nahrazovaného) budou tyto determinanty nulové (stejné řádky),
- zůstane tedy determinant s původním řádkem vynásobený koeficientem, který u něj v lineární kombinaci stál.

Poznámka:

Tento důsledek se bude hodit v následující části při výpočtech determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Vlastnosti determinantu: transpozice

Věta:

$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$

Důsledek: (rozvoj determinantu podle sloupce)

$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|,$

kde j můžeme volit libovolně a $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z $\mathbf{A}$ vyškrtnutím řádku i a zvoleného sloupce j.

Důkaz:

- využijeme rozvoje podle řádku (obrazovka 7) pro $\mathbf{A}^T$ a rovnosti determinantů matice a matice k ní transponované.

Vlastnosti determinantu: trojúhelníkové matice

Pozorování:

- Determinant diagonální, horní či dolní trojúhelníkové matice učíme tak, že vynásobíme elementy na její diagonále,
- speciálně $\det \mathbf{I} = 1$.

Důkaz:

Využijeme opakovaného rozvoje:

- podle prvního řádku (obrazovka 7) pro dolní trojúhelníkovou matici,
- podle prvního sloupce (předchozí obrazovka) pro horní trojúhelníkovou matici ,
- jeden či druhý rozvoj pro matici diagonální.

Poznámka:

I toto pozorování se bude hodit při výpočtech determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Vlastnosti determinantu: součin, inverze

Věta:

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou (čtvercové) matice stejných řádů, pak platí

$$|\mathbf{A}.\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.$$

Důsledek:

Nechť matice $\mathbf{A}$ je regulární, pak má nenulový determinant a platí

$$|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|.$$

A naopak.

Důkaz:

- $\Rightarrow$: $|\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}|.|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}| = |\mathbf{I}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}|.|\mathbf{A}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0, |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- $\Leftarrow$: (sporem)
  $\mathbf{A}$ je singulární, $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow$ má lineárně závislé řádky $\Rightarrow$ jeden lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních $\Rightarrow$ po odečtení této lineární kombinace od tohoto řádku jej anulujeme $\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \rightarrow$ spor.

Poznámka:

- Matice je regulární (singulární), právě když má nenulový (nulový) determinant.

Vlastnosti determinantu: součin, inverze

Důsledek:

Podobné matice mají stejné determinanty.

Důkaz:

- $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T} \Rightarrow |\mathbf{A}'| = |\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}|.|\mathbf{A}|.|\mathbf{T}| = \frac{1}{|\mathbf{T}|}.|\mathbf{A}|.|\mathbf{T}| = |\mathbf{A}|.$

Ekvivalentní definice determinantu
(nepovinný dodatek)

Tvrzení:

Nechť $\mathcal{D}$ je (totálně) antisymetrická** n-lineární* forma na $\mathbb{R}^n$ splňující $\mathcal{D}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ (kde $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ je kanonická báze*** na $\mathbb{R}^n$). Pak je tato forma určena jednoznačně.

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n \times n$ a $\mathcal{D}$ je (totálně) antisymetrická n-lineární forma z předchozího tvrzení. Pak pod *determinantem* matice $\mathbf{A}$ rozumíme

$$|\mathbf{A}| \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{R}}, \dots, \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{R}}),$$

kde $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{R}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ jsou vektory z $\mathbb{R}^n$ reprezentující řádky matice $\mathbf{A}$.

* $\mathcal{D}\colon \overbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{n-\text{krát}} \to \mathbb{R}$, lineární v každém argumentu (viz lekce 6, obrazovka 25)

** mění znaménko při prohození libovolné dvojice argumentů (viz lekce 6, obrazovka 26)

*** $\boldsymbol{e}_1 = (1,0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1, \dots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0,0, \dots, 1)$ (viz lekce 3, obrazovka 21)

Ekvivalentní definice determinantu
(nepovinný dodatek)

Poznámka:

- V rámci našeho výkladu je výše uvedená definice vlastně větou, jejíž jednotlivé části jsme porůznu zmínili (příp. dokázali) v předchozím výkladu:
    - multilinearita – obrazovka 8,
    - (totální) antisymetrie – obrazovka 7,
    - hodnota v kanonické bázi $\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{I} = 1$ – obrazovka 11.
- S „tradiční“ definicí (obrazovka 4) je definice z předchozí obrazovky ekvivalentní.
- Zkratkovitě (a nepřesně) můžeme říci, že determinant je (totálně) antisymetrickou multilineární formou na množině všech čtvercových matic.

2. Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

Postup:

- matice 2×2 či 3×3,
- dosazení do vzorce (grafického schématu, viz obrazovka 5),
- pokud si ho nepamatujeme, odvodíme přímo z definice.

Příklad:

- viz dále (zpravidla používáme jako závěrečný krok rozvoje podle řádku/sloupce).

Rozvoj podle řádku

Postup:

- identifikujeme řádek s největším počtem nulových prvků,
- aplikujeme vzorec z obrazovky 7.

Příklad:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} :$$

Rozvoj podle řádku

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 \times 2 + 1 \times (-3) \times 1 + (-2) \times (-2) \times (-1) - (-2) \times 0 \times 1 - 2 \times (-3) \times (-1) -$
  $-1 \times (-2) \times 2 = -9,$
- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = -27,$
- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = 9;$

- $|\mathbf{A}| = -(-9) - 2 \times (-27) - 9 = 54.$

Rozvoj podle sloupce

Postup:

- identifikujeme sloupec s největším počtem nulových prvků,
- aplikujeme vzorec z obrazovky 10.

Příklad:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{4+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = -6 - 2 \times (-27) + 6 = 54\,.$$

Trojúhelníkové matice

Postup:

- vynásobíme prvky na diagonále,
- případně použijeme opakovaný rozvoj podle řádku (dolní trojúhelník) / sloupce (horní trojúhelník) .

Příklad:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$$

- $= (-1) \times 2 \times (-3) \times 18 = 108$,
- $= (-1)^{1+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -\left((-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} + 0 + 0\right) =$

  $= -2 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -2 \times \left((-1)^{1+1} \times (-3) \times |(18)| + 0\right) = 108$.

Gaussova eliminační metoda

Postup:

- matici upravíme pomocí řádkových úprav do horního trojúhelníkového tvaru,
- determinant získané trojúhelníkové matice počítáme jako součin prvků na diagonále,
- nesmíme zapomenout na násobky, které vzniknou z řádkových úprav s nejedničkovými koeficienty u upravovaného řádku (viz obrazovka 9).

Příklad:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ r2 = r2 + r1 \\ r3 = r3 + 3r1 \\ r4 = r4 + r1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ r3 = r3 - 2r2 \\ r4 = \mathbf{2}r4 - 3r2 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ \\ r4 = r4 - 3r3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times (-1) \times 2 \times (-3) \times 18 = \frac{1}{2} \times 108 = 54\,.$$

Poznámka:

Srovnejte s řešením předchozího příkladu.

3. Vybraná použití determinantů

Geometrie

- plocha rovnoběžníku*
  - $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$: $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$,
  - $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$: $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{1})|$, kde $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- objem rovnoběžnostěnu
  - $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$: $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

* Na této obrazovce označují | | absolutní hodnotu.

Inverzní matice

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n \times n$. Pak její inverzní matici můžeme získat jako:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C},$$

kde

$$c_{kj} = (-1)^{j+k}\left|\mathbf{A}_{jk}\right|.$$

Důkaz:

- $(\mathbf{A}.\mathbf{C})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, (-1)^{j+k}\left|\mathbf{A}_{jk}\right| = \cdots$
  - $i = j$: … $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, (-1)^{i+k}|\mathbf{A}_{ik}| = |\mathbf{A}|$,
  - $i \neq j$: … $= |\mathbf{A}'|$, kde $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ náhradou j-tého řádku i-tým, proto $|\mathbf{A}'| = 0$,
  - matice $\mathbf{A}.\mathbf{C}$ je tedy diagonální a na diagonále má stejná čísla ($|\mathbf{A}|$);
- proto $\mathbf{A}.\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Inverzní matice

Důsledek: (Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava n LAR o n neznámých, jejíž matice je regulární. Pak můžeme pro její (jednoznačné) řešení psát:

$$x_k = \frac{1}{|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}_{\mathbf{b}k}|,$$

kde $\mathbf{A}_{\mathbf{b}k}$ je matice, kterou získáme z $\mathbf{A}$ náhradou k-tého sloupce sloupcovým vektorem pravé strany ($\mathbf{b}$).

Důkaz:

- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C}.\mathbf{b}$,
- $x_k = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, b_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}|\mathbf{A}_{jk}|b_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}_{\mathbf{b}k}|$.

Poznámka:

Přestože je Cramerovo pravidlo mezi ‘nematematiky’ poměrně oblíbeno, má několik nevýhod:

- pro větší soustavy je výpočetně velmi náročné,
- dá se použít jen na speciální typ SLAR s regulární maticí soustavy (tedy nutně s maticí soustavy čtvercovou).

(Pozitivní) definitnost symetrické matice

Věta: (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ je symetrická matice řádu $n \times n$ a $\mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $k = 1,2, \dots, n$. Pak $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, právě když

- $\forall k = 1,2, \dots, n$: $\left|\mathbf{A}^{(k)}\right| > 0$.

Poznámka:

- Matice $\mathbf{A}$ je negativně definitiní, právě když je matice $(-\mathbf{A})$ pozitivně definitiní.
  Důkaz: $\mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(\mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u}) > 0 \quad \Leftrightarrow \mathbf{u}^T.(-\mathbf{A}).\mathbf{u} > 0.$
- Sylvestrovo kritérium je tedy možno využít i k ověření negativní definitnosti matice.

Tvrzení:

Nechť jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{(k)}$ stejné jako výše. Pak je $\mathbf{A}$ negativně definitní, právě když:

- $\forall$ liché $k \in \{1,2, \dots, n\}$: $\left|\mathbf{A}^{(k)}\right| < 0 \quad \wedge \quad \forall$ sudé $k \in \{1,2, \dots, n\}$: $\left|\mathbf{A}^{(k)}\right| > 0$.

Důkaz: $\left|\alpha\mathbf{A}^{(k)}\right| = \alpha^k \left|\mathbf{A}^{(k)}\right|$ (plyne z definice, ověřte pro $k = 1$, 2 a 3), zde $\alpha = -1$.

Vlastní čísla čtvercových matic

- velmi důležitá aplikace,
- samostatná lekce (11).

Konec lekce 8.