Kvadratické formy na LVP

Lineární algebra

lekce 7

Osnova

1. Kvadratické formy
2. Klasifikace kvadratických forem

(3. Řešení SLAR se symetrickou maticí soustavy)

1. Kvadratické formy

Kvadratická forma

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $B: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je bilineární* forma (BLF) na něm. Pak zobrazení $Q_B: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definované předpisem

- $Q_B(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$

nazveme *kvadratickou formou* (KF) indukovanou BLF B.**

Poznámka:

- Obecně musíme požadovat, aby $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}$, kde $\mathcal{B} \times \mathcal{B} = \mathcal{D}(B)$. Na konečnědimenzionálním LVP můžeme ale (bez újmy na obecnosti) ztotožnit $\mathcal{B}$ s $\mathcal{U}$.

  V dalším budeme uvažovat jen konečnědimenzionální LVP a předpokládat $\mathcal{B} = \mathcal{U}$.
- Kvadratické formy můžeme obecně definovat i na komplexních LVP, my se ale podržíme omezené definice na prostorech reálných.
- Zřejmě platí:
  - $Q_B(\boldsymbol{o}) = 0$,
  - $Q_B(-\boldsymbol{u}) = Q_B(\boldsymbol{u})$ $[Q_B(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha^2 Q_B(\boldsymbol{u})]$.

* Tj. lineární v obou argumentech: $B(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \beta B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \ldots$.

** Nebude-li to nutné, nebudeme index specifikující BLF, která KF indukuje, uvádět.

Kvadratická forma

Poznámka:

- KF je určena zadanou BLF jednoznačně.
- Platí to i naopak?

Pozorování:

- Každou bilineární formu můžeme rozložit na symetrickou a antisymetrickou část:
  - $B = B_S + B_A,^{*}$
- $B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = -B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \Rightarrow B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$, tedy $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = B_S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$,
- dvě BLF se stejnou symetrickou částí tedy definují jednu a tutéž KF.

Poznámka:

- pro danou KF není ji indukující BLF určena jednoznačně,
- netriviální příspěvek má jen symetrická část indukující BLF,
- proto budeme v dalším uvažovat pouze symetrické** indukující BLF (které jsou KF určeny jednoznačně, viz dále).

* $B_S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})] = B_S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),\;\; B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}[B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})] = -B_A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$

** $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$

Kvadratická forma

Příklad:

- $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 - u_2 v_2 + \frac{1}{2} u_1 v_2 + \frac{1}{2} u_2 v_1$, pak
  - B je symetrická BLF (ověřte),
  - $Q_B(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = u_1 u_1 - u_2 u_2 + \frac{1}{2} u_1 u_2 + \frac{1}{2} u_2 u_1 = u_1^2 - u_2^2 + u_1 u_2$.

- $B'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 - u_2 v_2 + \frac{3}{2} u_1 v_2 - \frac{1}{2} u_2 v_1$, pak
  - B' není symetrická (dokažte, určete její symetrickou a antisymetrickou část),
  - $Q_{B'}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} B'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = u_1 u_1 - u_2 u_2 + \frac{3}{2} u_1 u_2 - \frac{1}{2} u_2 u_1 = u_1^2 - u_2^2 + u_1 u_2 = Q_B(\boldsymbol{u})$.

Příklad:

Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická* matice řádu $n \times n$, pak zobrazení $Q_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované:

$$Q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^T . \mathbf{A} . \mathbf{u} \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j\right)$$

je KF na $\mathbb{R}^n$.

* Obecně bychom nemuseli symetrii požadovat, příspěvek antisymetrické části matice $\mathbf{A}$ ke $Q_{\mathbf{A}}$ by ale byl tak jako tak nulový.

Maticová reprezentace kvadratické formy

Opakování:

Nechť $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na $\mathcal{U}$, pak

- $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{u}^T . \mathbf{B} . \mathbf{v}$,

kde

- $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou (aritmetické) sloupcové vektory souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{A}$ $(\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{a}_i)$,
- $\mathbf{B}$ je (čtvercová) matice řádu $n \times n$, $b_{ij} = B(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$.

Je-li navíc B symetrická, je symetrická i matice $\mathbf{B}$.

Tvrzení:

Kvadratickou formu Q je možno v zadané bázi $\mathcal{A}$ na konečnědimenzionálním LVP $\mathcal{U}$ jednoznačně reprezentovat symetrickou maticí $\mathbf{Q}$ splňující:

- $Q(\boldsymbol{u}) = \mathbf{u}^T . \mathbf{Q} . \mathbf{u}$.

Důkaz:

existence matice $\mathbf{Q}$

- existuje symetrická bilineární forma B splňující $Q(\boldsymbol{u}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$: $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \mathbf{u}^T . \mathbf{B} . \mathbf{u}$, kde $b_{ij} = B(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$,
- stačí tedy položit $\mathbf{Q} = \mathbf{B}$;

Maticová reprezentace kvadratické formy

jednoznačnost matice $\mathbf{Q}$ (vlastně jednoznačnost symetrické BF indukující Q)

- předpokládejme, že KF Q indukují dvě symetrické BLF: B a B',
- jim by odpovídaly dvě symetrické matice $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ splňující (v zadané bázi) $Q(\boldsymbol{u}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{u} = \mathbf{u}^T.\mathbf{Q}'.\mathbf{u}$,
- matice $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}'$ by tedy $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ musela splňovat $\mathbf{u}^T.\mathbf{R}.\mathbf{u} = 0$,
  - speciálně by to muselo platit pro vektory kanonické báze na $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_i = 0$,
  - a jejich součty ($i \neq j$): $0 = \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\right)^T.\mathbf{R}.\left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\right) = \underbrace{\mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_i}_{0} + \mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_i + \underbrace{\mathbf{e}_j{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j}_{0} =$

    $= \mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j + \underbrace{\left(\mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j\right)^T}_{=\mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j\ (\text{číslo})} = 2\mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j$,
- proto
  - $i = j$: $\quad r_{ii} = \mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_i = 0$,
  - $i \neq j$: $\quad r_{ij} = \mathbf{e}_i{}^T.\mathbf{R}.\mathbf{e}_j = 0$,
- a matice $\mathbf{R}$ je tedy nulová a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$.

Poznámka:

- K výpočtu matice $\mathbf{Q}$ stačí najít nějakou BLF, která KF Q indukuje, a symetrizovat ji (tedy najít její symetrickou část).
- Z (důkazu) předchozího tvrzení víme, že nalezená symetrická BLF je určena „svou“ KF jednoznačně (viz též obrazovka 5) a že pomocí ní určená matice $\mathbf{Q}$ je určena jednoznačně rovněž.

Maticová reprezentace kvadratické formy

Příklad:

Nalezněte matici KF $Q(\boldsymbol{u}) = u_1^2 - u_2^2 + u_1 u_2$ v kanonické bázi na $\mathbb{R}^2$.

Řešení

- $B_Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + \frac{1}{2}(u_1 v_2 + u_2 v_1)$ (viz též příklad na obrazovce 6, nutná je symetrie BLF!),
- $q_{11} = B_Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = B_Q\big((1,0),(1,0)\big) = 1 \times 1 - 0 \times 0 + \frac{1}{2}(1 \times 0 + 0 \times 1) = 1$,
- $q_{22} = B_Q(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = B_Q\big((0,1),(0,1)\big) = 0 \times 0 - 1 \times 1 + \frac{1}{2}(0 \times 1 + 1 \times 0) = -1$,
- $q_{12} = B_Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = B_Q\big((1,0),(0,1)\big) = 1 \times 0 - 0 \times 1 + \frac{1}{2}(1 \times 1 + 0 \times 0) = \frac{1}{2}$,
- $q_{21} = q_{12} = \frac{1}{2}$,
- $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Poznámka:

V kanonické bázi je možný přímý odečet maticových elementů matice $\mathbf{Q}$ (viz BLF, lekce 6, obrazovka 18), pozor ale na dělení „smíšených“ koeficientů.

Transformace matice KF při změně báze

Opakování: (viz lekce 6, obrazovka 20)

- $B: \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{B}.\mathbf{u} = \mathbf{u}'^T.\mathbf{B}'.\mathbf{u}'$,
- $\mathbf{u} = \mathbf{T}'.\mathbf{u}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{u}'$, $\mathbf{v} = \mathbf{T}'.\mathbf{v}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{v}'$,
- $\mathbf{B}' = \mathbf{T}'^T.\mathbf{B}.\mathbf{T}' = (\mathbf{T}^{-1})^T.\mathbf{B}.\mathbf{T}^{-1}$.

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ jsou matice KF Q v bázích $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ (na LVP $\mathcal{U}$), pak

- $\mathbf{Q}' = \mathbf{T}'^T.\mathbf{Q}.\mathbf{T}' = (\mathbf{T}^{-1})^T.\mathbf{Q}.\mathbf{T}^{-1}$,

kde $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}'$ jsou výše uvedené transformační matice.

Důkaz: přímý důsledek transformačních vlastností matic BLF.

Poznámka:

- $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T.\mathbf{Q}'.\mathbf{T} = (\mathbf{T}'^{-1})^T.\mathbf{Q}'.\mathbf{T}'^{-1}$,
- kongruentní matice definují jednu a tutéž kvadratickou formu v různých bázích,
- symetrie matice se při kongruenci zachovává (viz lekce 6, obrazovka 21).

2. Klasifikace kvadratických forem

Klasifikace kvadratických forem

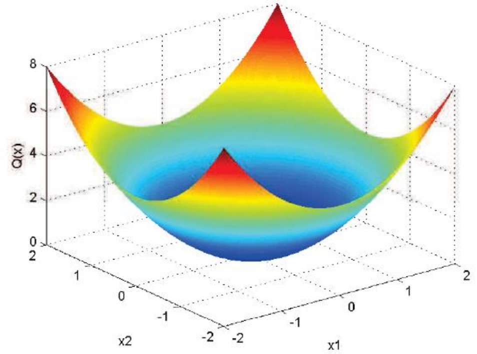
Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $Q: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je KF na něm, pak řekneme, že Q je

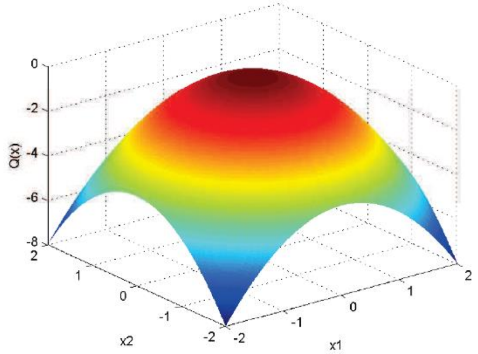
- *pozitivně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) > 0$,
- *pozitivně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) \geq 0 \ \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) = 0$,
- *negativně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) < 0$,
- *negativně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) \leq 0 \ \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) = 0$,
- *indefinitní*, právě když $\exists \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) < 0$.

Klasifikace kvadratických forem

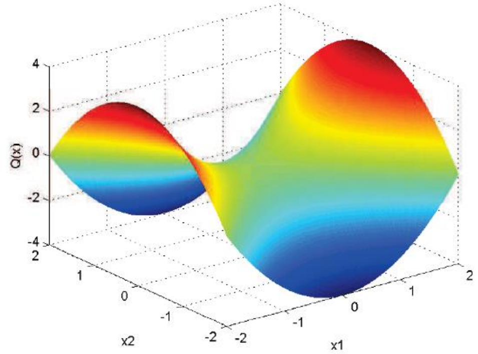
Příklad:*



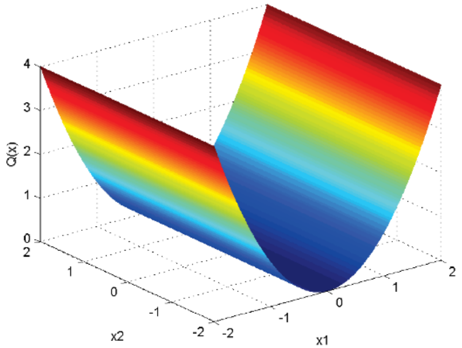
pozitivně definitní



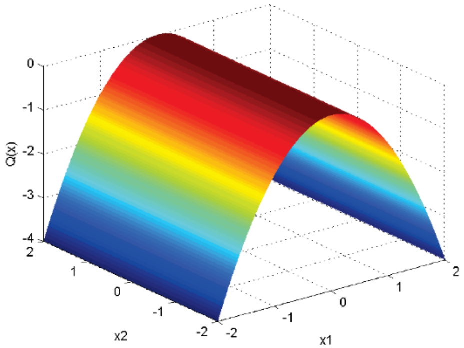
negativně definitní



indefinitní



pozitivně semidefinitní



negativně semidefinitní

* Převzato z prezentace D. Lukáše.

Klasifikace kvadratických forem

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $Q: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je KF na něm, pak řekneme, že Q je

- *pozitivně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) > 0$,
- *pozitivně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) \geq 0 \ \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) = 0$,
- *negativně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) < 0$,
- *negativně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) \leq 0 \ \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) = 0$,
- *indefinitní*, právě když $\exists \boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}: Q(\boldsymbol{v}) < 0$.

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice řádu $n \times n$, pak řekneme, že $\mathbf{A}$ je

- *pozitivně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} > 0$,
- *pozitivně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} \geq 0 \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{v}^T.\mathbf{A}.\mathbf{v} = 0$,
- *negativně definitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} < 0$,
- *negativně semidefinitní*, právě když $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} \leq 0 \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{v}^T.\mathbf{A}.\mathbf{v} = 0$,
- *indefinitní*, právě když $\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} > 0 \wedge \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}: \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} < 0$.

Poznámka:

- Symetrická matice $\mathbf{A}$ je konkrétním způsobem definitní, pokud je taková jí odpovídající KF $Q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u}$, a naopak.
- Definitnost KF je tedy možno klasifikovat pomocí jí odpovídající matice. (Nezávisle na bázi?)

Klasifikace kvadratických forem

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ jsou dvě (symetrické) matice reprezentující KF Q v různých bázích*, pak mají stejnou definitnost.

Důkaz:

- $\mathbf{Q}' = \mathbf{T}'^T.\mathbf{Q}.\mathbf{T}'$,
- $\mathbf{u}'^T.\mathbf{Q}'.\mathbf{u}' = \mathbf{u}'^T.\left(\mathbf{T}'^T.\mathbf{Q}.\mathbf{T}'\right).\mathbf{u}' = \left(\mathbf{u}'^T.\mathbf{T}'^T\right).\mathbf{Q}.(\mathbf{T}'.\mathbf{u}') = (\mathbf{T}'.\mathbf{u}')^T.\mathbf{Q}.(\mathbf{T}'.\mathbf{u}') = \mathbf{u}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{u}.$

Poznámka:

Definitnost KF je tedy možno klasifikovat pomocí jim odpovídajících matic. Nezávisle na bázi? ANO.

* Obecně dvě kongruentní symetrické matice.

Klasifikace diagonálních matic

Definice:

Matici $\mathbf{A}$ nazveme diagonální, právě když platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Tvrzení:

Diagonální matice $\mathbf{A}$ (řádu $n \times n$) je

- pozitivně definitní, právě když $\forall i = 1,2,\dots,n: a_{ii} > 0$,
- pozitivně semidefinitní, právě když $\forall i = 1,2,\dots,n: a_{ii} \geq 0 \wedge \exists j \in \{1,2,\dots,n\}: a_{jj} = 0$,
- negativně definitní, právě když $\forall i = 1,2,\dots,n: a_{ii} < 0$,
- negativně semidefinitní, právě když $\forall i = 1,2,\dots,n: a_{ii} \leq 0 \wedge \exists j \in \{1,2,\dots,n\}: a_{jj} = 0$,
- indefinitní, právě když $\exists i \in \{1,2,\dots,n\}: a_{ii} > 0 \wedge \exists j \in \{1,2,\dots,n\}: a_{jj} < 0$.

Důkaz:

- $\mathbf{u}^T.\mathbf{A}.\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}u_i^2 = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + \cdots + a_{nn}u_n^2$,
- v existenčních podmínkách na obrazovce 12 stačí volit vektory $\mathbf{u} = (0,\dots,\underbrace{1}_{i},\dots,0)$ a $\mathbf{v} = (0,\dots,\underbrace{1}_{j},\dots,0)$.

Klasifikace (obecných) symetrických matic

Idea:

- Matici $\mathbf{A}$ převedeme na diagonální tvar a klasifikujeme dle pravidel z předchozí obrazovky.
- Nechť matice $\mathbf{A}$ reprezentuje nějakou KF $Q_{\mathbf{A}}$ v nějaké (např. kanonické) bázi na $\mathbb{R}^n$, pokusíme se najít jinou bázi, ve které bude matice formy $Q_{\mathbf{A}}$ (označme ji $\mathbf{A}'$) diagonální.
- Tato matice bude nutně kongruentní s maticí $\mathbf{A}$, tedy $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^T.\mathbf{A}.\mathbf{T}$, kde $\mathbf{T}$ je nějaká regulární matice.
(Jak ale matici $\mathbf{T}$ najít?)

Pozorování:

- Nechť $\mathbf{G}$ je některá z matic realizující (násobením zleva) konkrétní krok Gaussovy eliminace (řádkovou úpravu) matice $\mathbf{A}$ (viz lekce 2, obrazovka 18), pak matice $\mathbf{G}^T$ provádí stejnou úpravu s odpovídajícími sloupci násobením zprava. $(\mathbf{G}.\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.\mathbf{G}^T$
- Nechť posloupnost řádkových úprav $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_N$ převádí (symetrickou) matici $\mathbf{A}$ na horní trojúhelníkový tvar s odstupňovaným řádkováním (viz lekce 1, obrazovka 21),
$\mathbf{G}_N.\dots.\mathbf{G}_2.\mathbf{G}_1.\mathbf{A} \to \mathbf{U}$ („horní trojúhelník“),
pak ve stejném pořadí provedené sloupcové úpravy převedou matici $\mathbf{U}$ na diagonální,
$\mathbf{U}.\mathbf{G}_1^T.\mathbf{G}_2^T.\dots.\mathbf{G}_N^T \to \mathbf{D}$ („diagonála“).
- Stačí tedy volit $\mathbf{T}^T = \mathbf{G}_N.\dots.\mathbf{G}_2.\mathbf{G}_1$ či $\mathbf{T} = \mathbf{G}_1^T.\mathbf{G}_2^T.\dots.\mathbf{G}_N^T$ (libovolné závorkování):
$\mathbf{A} \to \mathbf{G}_N.(\dots.(\mathbf{G}_2.(\mathbf{G}_1.\mathbf{A}.\mathbf{G}_1^T).\mathbf{G}_2^T).\dots).\mathbf{G}_N^T = \mathbf{A}'.$

Klasifikace (obecných) symetrických matic

Příklad:

Klasifikujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r3=4r3-r1]{r2=2r2-r1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[s3=4s3-s1]{s2=2s2-s1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3=2r3+r2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow{s3=2s3+s2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 104 \end{pmatrix}$,
- matice je pozitivně definitní $(4 > 0 \ \wedge \ 8 > 0 \ \wedge \ 104 > 0)$.

Klasifikace (obecných) symetrických matic

<u>Poznámka:</u>

- Při provádění jednotlivých kroků Gaussovy eliminace se obvykle snažíme vyhnout prohazování řádků:
  - prohazování řádků občas nefunguje:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1 \leftrightarrow r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s1 \leftrightarrow s2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  - souhrnná matice řádkových úprav $\mathbf{T}^T = \mathbf{G}_N. \dots . \mathbf{G}_2. \mathbf{G}_1$ je pak dolní trojúhelníková.

Klasifikace (obecných) symetrických matic

Příklad:

Klasifikujte matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{bez prohození řádků)}]{r1=r1+r3 \ \text{(nenulový pivot}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s1=s1+s3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r3=4r3-3r1]{r2=2r2-r1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[s3=4s3-3s1]{s2=2s2-s1}$

  $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & -12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3=2r3+3r2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -44 \end{pmatrix} \xrightarrow{s3=2s3+3s2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -88 \end{pmatrix}$,

- matice je indefinitní.

Klasifikace (obecných) symetrických matic

Řešení 2: (v tomto příkladu prohození řádků funguje)

- $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1 \leftrightarrow r3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s1 \leftrightarrow s3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3=2r3-r1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s3=2s3-s1}$$
  $$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3=3r3-4r2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow{s3=3s3-4s2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -66 \end{pmatrix},$$

- jiný diagonální tvar, ale stejný závěr: matice je indefinitní.

3. Řešení SLAR se symetrickou maticí soustavy (nepovinný dodatek)

SLAR se symetrickou maticí soustavy

Pozorování:

- Nechť je matice SLAR

  $$\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  symetrická, pak ji lze převést kongruentní transformací na diagonální,

  $$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^T.\mathbf{A}.\mathbf{T},$$

  kde $\mathbf{T}^T = \mathbf{G}_N. \dots .\mathbf{G}_2.\mathbf{G}_1$ [$\mathbf{G}_K$ jsou matice elementárních řádkových úprav (bez prohazování řádků)].

- Uvažujme dále soustavu

  $$\mathbf{A}'.\mathbf{x}' = \mathbf{b}' \;\leftrightarrow\; \mathbf{T}^T.\mathbf{A}.\mathbf{T}.\mathbf{x}' = \mathbf{b}' \;\leftrightarrow \mathbf{A}.(\mathbf{T}.\mathbf{x}') = (\mathbf{T}^T)^{-1}.\mathbf{b}'.$$

- Položíme-li

  $$\mathbf{b} = (\mathbf{T}^T)^{-1}.\mathbf{b}' \quad (\mathbf{b}' = \mathbf{T}^T.\mathbf{b}),$$

  $$\mathbf{x} = \mathbf{T}.\mathbf{x}',$$

  bude tato nová soustava ekvivalentní s původní.

SLAR se symetrickou maticí soustavy

Postup:

- „Gaussovy kongruence“ aplikujeme na matici soustavy, řádkové úpravy pak na vektor pravých stran:
  - $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ (diagonální),
  - $\mathbf{b} \to \mathbf{b}'$,
- řešením (značně jednodušší) soustavy $\mathbf{A}'.\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$ získáme vektor $\mathbf{x}'$,
- provedené sloupcové úpravy aplikujeme na jednotkovou matici:
  - $\mathbf{I} \to \mathbf{I}.\mathbf{T} = \mathbf{T}$,

  případně aplikujeme na jednotkovou matici provedené úpravy řádkové a výsledek transponujeme,
  - $\mathbf{I} \to \mathbf{T}^T.\mathbf{I} = \mathbf{T}^T \to \mathbf{T} = (\mathbf{T}^T)^T$,

  takto získáme matici $\mathbf{T}$,
- řešení původní soustavy získáme jako

  $\mathbf{x} = \mathbf{T}.\mathbf{x}'$.

SLAR se symetrickou maticí soustavy

Příklad:

Řešte soustavu rovnic $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Řešení:

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{r2=r2+r1 \\ r3=r3-r1 \\ (\text{včetně } \mathbf{b})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{s2=s2+s1 \\ s3=s3-s1 \\ (\text{jen } \mathbf{A})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{r3=r3-r2 \\ (\text{včetně } \mathbf{b})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

  $\xrightarrow[]{\substack{s3=s3-s2 \\ (\text{jen } \mathbf{A})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right),$

- $x_1' = 1, x_2' = 3, x_3' = 1,$

SLAR se symetrickou maticí soustavy

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[s3=s3-s1]{s2=s2+s1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s3=s3-s2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T},$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1.$

Konec lekce 7.