Lineární, bilineární (a multilineární) formy na LVP

Lineární algebra

lekce 6

Osnova

1. Lineární formy
2. Bilineární formy

(3. Multilineární formy)

1. Lineární formy

Lineární forma

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $A: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ splňuje:

- $\mathcal{D}(A)$ je (netriviální) podprostor $\mathcal{U}$,
- $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(A): A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v})$,
- $\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$: $A(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha A(\boldsymbol{u})$,

pak toto zobrazení nazveme *lineární formou* (LF) na $\mathcal{U}$.

Poznámka:

- Srovnejte podmínky z výše uvedené definice s těmi, které jsme v lekci 5 kladli na LZ LVP.
- $\mathbb{R}$ je speciální (jednodimenzionální) LVP (umíme dokázat?). LF pak není ničím jiným než speciálním typem LZ LVP.
- Podobně jako v případě obecných LZ LVP (speciálně pak LVP konečnědimenzionálních) můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathcal{D}(A) = \mathcal{U}$ (viz lekce 5).
- V platnosti zůstávají i další tvrzení týkající se LZ:
  - $A(\boldsymbol{o}) = 0$,
  - $A(-\boldsymbol{u}) = -A(\boldsymbol{u})$.

Lineární forma

Příklad:

Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, pak zobrazení $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované:

$$A(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{a}^T.\mathbf{u} = \mathbf{u}^T.\mathbf{a} \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots a_n u_n\right)$$

je LF na $\mathbb{R}^n$.

Poznámka:

- Tvrzení příkladu zůstává v platnosti i pro aritmetické vektory z $\mathbb{C}^n$.
- Pomocí vektorů z $\mathbb{R}^n$ lze definovat lineární formy na $\mathbb{R}^n$.

Příklad:

Nechť $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_n(a,b)$ (množina všech reálných polynomů maximálně stupně n definovaných na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$), pak zobrazení $A: \mathcal{P}_n(a,b) \to \mathbb{R}$ definované:

$$A(\boldsymbol{p}) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

je LF na $\mathcal{P}_n(a,b)$.

Maticová reprezentace lineární formy

Pozorování:

- $A: \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ je LF $(\dim \mathcal{U} = n < +\infty)$,
- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na $\mathcal{U}$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}_i$,
- $A(\boldsymbol{u}) = A(\sum_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \underbrace{A(\boldsymbol{a}_i)}_{a_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$,
- $A(\boldsymbol{u}) = \mathbf{a}^T.\mathbf{u} = \mathbf{u}^T.\mathbf{a}$, kde $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Poznámka:

- LF je jednoznačně určena obrazy prvků (nějaké) báze na $\mathcal{U}$.
- Každou LF na LVP dimenze n (speciálně pak každou LF na $\mathbb{R}^n$) je možno definovat pomocí (aritmetických) vektorů z $\mathbb{R}^n$. Tyto vektory jsou pro báze určeny jednoznačně, liší se ale bázi od báze.

Maticová reprezentace lineární formy

Příklad:

Nechť $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je LF, která splňuje $A(1,1) = 1$ a $A(1,-1) = -1$. Určete $A(2,3)$.*

Řešení

- nejdříve bychom měli ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1)$ tvoří na $\mathbb{R}^2$ bázi (zde ale není třeba, vyplyne z dalšího kroku)
- výpočet souřadnic vektoru $\boldsymbol{b} = (2,3)$ v bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ $\quad (\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2)$

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \alpha_1 = 5/2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{array},$$

- $A(2,3) = A(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2) = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2) = \frac{5}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times (-1) = 3$.

* Viz též lekce 5, obrazovka 11.

Maticová reprezentace lineární formy

Příklad:

Nechť $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je LF, která splňuje $A(1,1,-1) = 1$, $A(1,-1,0) = 0$ a $A(1,1,1) = -1$. Určete maticovou reprezentaci této LF v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$.*

Řešení

- nutno ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ a $\boldsymbol{a}_3$ skutečně tvoří na $\mathbb{R}^3$ bázi – samostatně,
- máme-li ověřeno, můžeme přímo psát: $\mathbf{a}^T = (1 \quad 0 \quad -1)$, případně $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Poznámka:

V tomto příkladu byly zadány přímo obrazy prvků zvolené báze $\mathcal{A}$. Proto jsme mohli vektor/matici $\mathbf{a}$ zkonstruovat přímo z těchto obrazů.

Pokud by báze $\mathcal{A}$ (pro kterou máme nalézt maticovou reprezentaci zadané formy) byla odlišná od báze $\mathcal{B}$ (obrazy jejíchž prvků máme zadány), museli bychom nejdříve najít souřadnice prvků báze $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ a komponenty vektoru/matice $\mathbf{a}$ určit dosazením do $a_i \stackrel{\text{def}}{=} A(\boldsymbol{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A(\boldsymbol{b}_j)$.

* Viz též lekce 5, obrazovky 23 (příklad) a 24 (poznámka).

Maticová reprezentace lineární formy

Příklad:

Nalezněte maticovou reprezentaci LF $A(\boldsymbol{u}) = 3u_1 - u_2 + 2u_3$ v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$.

Řešení

- nutno ověřit, že zadané zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je skutečně LF – samostatně,
- označme $\mathbf{a}^T = (a_1\ a_2\ a_3)$, pak platí
  - $a_1 = A(\boldsymbol{a}_1) = 3 \times 1 - 1 + 2 \times (-1) = 0$,
  - $a_2 = A(\boldsymbol{a}_2) = 3 \times 1 - (-1) + 2 \times 0 = 4$,
  - $a_3 = A(\boldsymbol{a}_3) = 3 \times 1 - 1 + 2 \times 1 = 4$.
- $\mathbf{a}^T = (0\ 4\ 4)$, případně $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Maticová reprezentace lineární formy

Příklad:

Nechť $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je LF, která splňuje $A(1,1,-1) = 1$, $A(1,-1,0) = 0$ a $A(1,1,1) = -1$. Určete její jádro.*

Řešení

- opět nutno ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$ tvoří na $\mathbb{R}^3$ bázi – samostatně,
- hledáme všechna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ taková, že $A(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3) = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2) + \alpha_3 A(\boldsymbol{a}_3) = 0$,
  ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou souřadnice vektorů z $\mathcal{N}(A)$ v bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$)
  $\alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 0 + \alpha_3 \times (-1) = 0 \to \alpha_3 = t \in \mathbb{R}, \alpha_2 = s \in \mathbb{R}, \alpha_1 = t$,
- $\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = t(1,1,-1) + s(1,-1,0) + t(1,1,1) = t(2,2,0) + s(1,-1,0);\ t, s \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}\big((2,2,0), (1,-1,0)\big) = \mathcal{L}\big((1,1,0), (1,-1,0)\big) = \mathcal{L}\big((1,0,0), (0,1,0)\big)$, $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.

Poznámka:

To, že $\dim \mathcal{N}(A) = 2$, jsme mohli zjistit přímo (a jednodušeji) z věty o dimenzi (zdůvodněte jednotlivé sčítance):

- $\dim \mathbb{R} + \dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathbb{R}^3 \quad \to \quad 1 + \dim \mathcal{N}(A) = 3$.

* Lineární forma je speciálním případem obecného LZ, její jádro tedy definujeme stejně jako v případě LZ: $\mathcal{N}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: A(\boldsymbol{u}) = 0\}$.
Viz též lekce 5, obrazovka 14.

Transformace vektoru LF (při změně báze)

Pozorování:

- $A: \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ A(\boldsymbol{u}) = \mathbf{a}^T.\mathbf{u} = \mathbf{a}'^T.\mathbf{u}'$:
  - $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$,
  - $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \dots \\ u'_n \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n\}$, $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \dots \\ a'_n \end{pmatrix}$,
- transformace souřadnic zobrazovaného vektoru (viz lekce 3, obrazovky 25 a 26)
  - $\mathbf{u} = \mathbf{T}'.\mathbf{u}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{u}'$ (matice $n \times n$),
- transformace vektoru/matice LF
  - $A(\boldsymbol{u}) = \mathbf{a}^T.\mathbf{u} = \mathbf{a}^T.(\mathbf{T}'.\mathbf{u}') = (\mathbf{a}^T.\mathbf{T}').\mathbf{u}' = \mathbf{a}'^T.\mathbf{u}' \to \mathbf{a}'^T = \mathbf{a}^T.\mathbf{T}' = \mathbf{a}^T.\mathbf{T}^{-1}$.

Transformace matice LF (při změně báze)

Poznámka:

- $\mathbf{a}'^T = \mathbf{a}^T.\mathbf{T}^{-1} \rightarrow \mathbf{a}' = \left(\mathbf{T}^{-1}\right)^T.\mathbf{a}$,
- ortogonální matice (viz lekce 10): $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{T}.\mathbf{a}$.

2. Bilineární formy

Bilineární forma

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $B: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ splňuje:

- $\mathcal{D}(B) = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, kde $\mathcal{B}$ je (netriviální) podprostor $\mathcal{U}$,
- $\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{B}: A_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ a $\forall\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{B}: A_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ jsou LF,

pak toto zobrazení nazveme *bilineární formou* (BLF) na $\mathcal{U}$.

Poznámka:

- Zkráceně říkáme, že bilineární forma je lineární v každém argumentu. Platí tedy $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{B})$:
  - $B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$, $B(\alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,
  - $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$, $B(\boldsymbol{u}, \alpha \boldsymbol{v}) = \alpha B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.
- Podobně jako v případě LF budeme (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že $\mathcal{D}(B) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Tvrzení:

- $\forall u, v \in \mathcal{B}\ (\mathcal{U}): B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{o}) = B(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = 0$,
- $\forall u, v \in \mathcal{B}\ (\mathcal{U}): B(\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}) = B(-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, tedy $B(-\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Bilineární forma

Příklad:

Nechť $\mathbf{B}$ je matice řádu $n \times n$, pak zobrazení $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované:

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^T . \mathbf{B} . \mathbf{v} \ \left(= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_i v_j\right)$$

je BLF na $\mathbb{R}^n$.*

Poznámka:

- Matice řádu $n \times n$ definují tedy bilineární formy na $\mathbb{R}^n$.
- Tvrzení příkladu zůstává v platnosti i pro $B: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Příklad:

Nechť $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_n(a, b)$,** pak zobrazení $B: \mathcal{P}_n(a, b) \times \mathcal{P}_n(a, b) \to \mathbb{R}$ definované:

$$B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b p(x) q(x) \mathrm{d}x$$

je BLF na $\mathcal{P}_n(a, b)$.

* Např. $B(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)^T . \mathbf{B} . \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2^T) . \mathbf{B} . \mathbf{v} = \mathbf{u}_1^T . \mathbf{B} . \mathbf{v} + \mathbf{u}_2^T . \mathbf{B} . \mathbf{v} = B(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$;
$B(\alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\alpha \mathbf{u})^T . \mathbf{B} . \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{u}^T . \mathbf{B} . \mathbf{v}) = \alpha B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

** Množina všech reálných polynomů maximálně stupně n definovaných na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Maticová reprezentace bilineární formy

Pozorování:

- $B: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ je BLF $(\dim \mathcal{U} = n < +\infty)$,
- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na $\mathcal{U}$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^n u_i\boldsymbol{a}_i$,
  - $\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{j=1}^n v_j\boldsymbol{a}_j$,
- $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = B\left(\sum_{i=1}^n u_i\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^n v_j\boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i B\left(\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^n v_j\boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j\, u_i\, \underbrace{B(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)}_{b_{ij}} =$

  $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i b_{ij} v_j$,
- $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{B}.\mathbf{v}$, kde $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Poznámka:

- BLF je jednoznačně určena obrazy prvků zvolené báze na $\mathcal{U}$.
- Každou BLF na LVP dimenze n (speciálně pak každou BLF na $\mathbb{R}^n$) je možno zadat pomocí čtvercových matic $n \times n$. Toto zadání je pro konkrétní volbu báze na LVP jednoznačné, liší se ale bázi od báze.

Maticová reprezentace bilineární formy

Příklad:

Nalezněte maticovou reprezentaci BLF $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ v kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$.

Řešení

- ověřte nejdříve, že zadané zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je skutečně BLF,
- označme $\mathbf{B}$ matici této BLF, a $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ a $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ prvky kanonické báze na $\mathbb{R}^3$, pak platí
  - $b_{11} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1,$
  - $b_{12} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0,$
  - $b_{13} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0,$
  - …
- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Maticová reprezentace bilineární formy

Příklad:

Nalezněte maticovou reprezentaci BLF $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + u_3v_2$ v kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$.

Řešení

- standardní řešení:
  - $b_{11} = B(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) = \cdots, b_{12} = B(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = \cdots, b_{13} = B(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) = \cdots, \ldots$
- jinak
  - $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + u_3v_2,$
  - $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Maticová reprezentace bilineární formy

Příklad:

Nalezněte maticovou reprezentaci BLF $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$.

Řešení

- označme $\mathbf{B}$ matici této BLF, pak můžeme psát
  - $b_{11} = B(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 3,$
  - $b_{12} = B(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 0 = 0,$
  - $b_{13} = B(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 1,$
  - …
- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$

Poznámka:

Přímý odečet elementů matice $\mathbf{B}$ z koeficientů formy B tentokrát možný není (báze není kanonická)!

Transformace matice BLF (při změně báze)

Pozorování:

- $B: \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{B}.\mathbf{v} = \mathbf{u'}^T.\mathbf{B'}.\mathbf{v'}$:
  - $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$,
  - $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \dots \\ u'_n \end{pmatrix}, \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_n \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n\}$, $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \dots & b'_{nn} \end{pmatrix}$,
- transformace souřadnic zobrazovaného vektoru (viz lekce 3, obrazovky 25 a 26)
  - $\mathbf{u} = \mathbf{T}'.\mathbf{u}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{u}', \mathbf{v} = \mathbf{T}'.\mathbf{v}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{v}'$,
- transformace matice BLF
  - $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{B}.\mathbf{v} = (\mathbf{T}'\ .\mathbf{u}')^T.\mathbf{B}.(\mathbf{T}'\ .\mathbf{v}') = \mathbf{u'}^T.[\ (\mathbf{T}')^T.\mathbf{B}.\mathbf{T}'\ ].\mathbf{v}' = \mathbf{u'}^T.\mathbf{B}'.\mathbf{v}' \to$
    $\mathbf{B}' = \mathbf{T'}^T.\mathbf{B}.\mathbf{T}' = (\mathbf{T}^{-1})^T.\mathbf{B}.\mathbf{T}^{-1}$.

Kongruentní matice

Definice:

Čtvercová matice $\mathbf{B}$ je *kongruentní* s maticí $\mathbf{A}$, právě když existuje regulární (čtvercová) matice $\mathbf{T}$ splňující

- $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T}$.

Poznámka:

- Matice $\mathbf{A}$ je *kongruentní* s maticí $\mathbf{B}$, právě když matice $\mathbf{B}$ je *kongruentní* s maticí $\mathbf{A}$ (stačí přejít od matice $\mathbf{T}$ k matici $\mathbf{T}^{-1}$). Můžeme tedy hovořit o maticích (vzájemně) kongruentních.
- Srovnejte s definicí podobných matic (viz lekce 5, obrazovka 26).

Pozorování:

Bilineární forma je reprezentována v různých bázích kongruentními maticemi.

Tvrzení:

Je-li matice $\mathbf{B}$ je *kongruentní* se symetrickou / antisymetrickou maticí $\mathbf{A}$, je rovněž symetrická / antisymetrická.

Důkaz:

- $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T}, \mathbf{B}^T = (\mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T})^T = \mathbf{T}^T . \mathbf{A}^T . (\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T} = \mathbf{B}$,
- $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T}, \mathbf{B}^T = (\mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T})^T = \mathbf{T}^T . \mathbf{A}^T . (\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}^T . (-\mathbf{A}) . \mathbf{T} = -\mathbf{T}^T . \mathbf{A} . \mathbf{T} = -\mathbf{B}$,

Symetrická a antisymetrická BLF

Definice:

Bilineární formu $B: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ nazveme *symetrickou* / *antisymetrickou*, právě když $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$ platí:

- $B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ / $B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Poznámka:

Symetrická / antisymetrická BLF je v libovolné bázi reprezentována symetrickou / antisymetrickou maticí:

- $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$ / $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$.

Důkaz: $b_{ij} = B(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j),\ \ b_{ji} = B(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) \ \Rightarrow \begin{cases} b_{ij} = b_{ji} \ \ (\mathrm{sym}) \\ b_{ij} = -b_{ji} \ \ (\mathrm{antisym}) \end{cases}.$

Pozorování:

Pro antisymetrickou BLF platí $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$, pro antisymetrickou matici pak $b_{ii} = 0$.

Tvrzení:

Jediná BLF, která je současně symetrická i antisymetrická, je nulová BLF $[\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}: B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0]$.

Důkaz: $B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \ \Leftrightarrow \ 2B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \ \Leftrightarrow \ B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$

Symetrická a antisymetrická část BLF

Tvrzení:

Každou bilineární formu $B: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ lze psát jako součet jisté symetrické a antisymetrické BLF,

- $B = B_S + B_A \qquad [B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = B_S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]$,

tyto BLF jsou určeny jednoznačně.

Důkaz:

- $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \underbrace{\frac{1}{2}[B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})]}_{B_S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} + \underbrace{\frac{1}{2}[B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})]}_{B_A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$,
- $B = B_S + B_A = B_S' + B_A' \quad \to \quad \underbrace{B_S - B_S'}_{\text{sym}} = \underbrace{B_A' - B_A}_{\text{antisym}} = 0.$

Definice:

Formy B_S a B_A nazýváme *symetrickou a antisymetrickou částí* formy B.

Poznámka:

Podobně lze každou čtvercovou matici jednoznačně rozložit na součet matice symetrické a antisymetrické (symetrická a antisymetrická část):

- $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^T).$

3. Multilineární formy
(nepovinný dodatek)

Multilineární forma

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ je LVP a $M\colon \overbrace{\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U}}^{m-\text{krát}} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ splňuje:

- $\mathcal{D}(M) = \overbrace{\mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{M}}^{m-\text{krát}}$, kde $\mathcal{M}$ je (netriviální) podprostor $\mathcal{U}$,
- M je lineární v každém argumentu,

pak toto zobrazení nazveme *multilineární formou* (MLF) na $\mathcal{U}$.

Poznámka:

- Podobně jako v případě LF a BLF budeme předpokládat, že $\mathcal{D}(M) = \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \cdots \times \mathcal{U}$.
- Podobně jako v případě LF a BLF můžeme MLF reprezentovat v pevně zvolené bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ pomocí (zobecněné) matice:
  - $M(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m = 1}^{n} m_{i_1 i_2 \dots i_m} u_{1 i_1} u_{2 i_2} \dots u_{m i_m}$,
  - $m_{i_1 i_2 \dots i_m} \stackrel{\text{def}}{=} M\left(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_m}\right)$,

  která je pro danou bázi určena jednoznačně a při změně báze se definovaným způsobem transformuje.

  Ale to už je jiný příběh ...

Symetrická / antisymetrická MLF

Definice:

Nechť M je MLF na LVP $\mathcal{U}$ splňující pro každou dvojici argumentů:

- $M(\dots,\boldsymbol{u}_i,\dots,\boldsymbol{u}_j,\dots) = M(\dots,\boldsymbol{u}_j,\dots,\boldsymbol{u}_i,\dots),$

pak tuto MLF nazveme *(totálně) symetrickou*.

Pokud forma M pro každou dvojici argumentů splňuje:

- $M(\dots,\boldsymbol{u}_i,\dots,\boldsymbol{u}_j,\dots) = -M(\dots,\boldsymbol{u}_j,\dots,\boldsymbol{u}_i,\dots),$

nazveme ji *(totálně) antisymetrickou*.

Konec lekce 6.