Lineární zobrazení LVP

Lineární algebra

lekce 5

Osnova

1. Lineární zobrazení (LZ)
2. Obor hodnot, nulový prostor (jádro) LZ
3. Maticová reprezentace LZ
4. Operace s LZ

1. Lineární zobrazení

Lineární zobrazení LVP

Definice:

Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou dva LVP a $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ splňuje:

- $\mathcal{D}(A)$* je (netriviální) podprostor $\mathcal{U}$,**
- $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(A): A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v})$,
- $\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}): A(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha A(\boldsymbol{u})$,

pak toto zobrazení nazveme *lineárním*.

Poznámka:

Ekvivalentním způsobem můžeme linearitu zobrazení definovat prostřednictvím rovnosti (*princip superpozice*)

- $A(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha A(\boldsymbol{u}) + \beta A(\boldsymbol{v})$,

případně

- $A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A(\boldsymbol{u}_j)$.

* Symbolem $\mathcal{D}(A)$ označujeme definiční obor zobrazení A, $\mathcal{D}(A) = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}\colon \exists A(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{V}\}$.

** Nepožadujeme-li od $\mathcal{D}(A)$ splnění dalších podmínek, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathcal{D}(A) = \mathcal{U}$. Na **konečněrozměrném prostoru** $\mathcal{U}$ je navíc možno A **vždy** dodefinovat tak, že $\mathcal{D}(A) = \mathcal{U}$. Je-li $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{U}$, nalezneme $\mathcal{D}'$ takové, že $\mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}'$ (viz lekce 3) a pro $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{D}'$ definujeme $A(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{o}$. Pak už jen využijeme možnosti rozkladu libovolného vektoru z $\mathcal{U}$ na součet vektorů z $\mathcal{D}(A)$ a $\mathcal{D}'$.

Lineární zobrazení LVP

Poznámka:

V dalším se budeme zabývat pouze lineárními zobrazeními konečnědimenzionálních prostorů $\mathcal{U}$ (a $\mathcal{V}$) a budeme předpokládat $\mathcal{D}(A) = \mathcal{U}$.

Poznámka:

Pokud $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, hovoříme v konečnědimenzionálním případě o *lineární transformaci* na $\mathcal{U}$ (a v nekonečnědimenzionálním případě o *lineárním operátoru* na $\mathcal{U}$).

Lineární zobrazení LVP

Příklad:

Níže uvedená zobrazení vybraných LVP jsou lineární (ověřte):

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y$,
- $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $m \times n$,
- $D\colon\ \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, kde $\mathcal{P}_n$ je prostor všech polynomů maximálně stupně n $[p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0]$ a $D(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Příklad:

Níže uvedená zobrazení lineární nejsou (ověřte):

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y + 1$,
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2$,
- $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^T.\mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $n \times n$,
- $D\colon\ \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $B(p) \stackrel{\text{def}}{=} p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Lineárn

a) $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) =$
$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

b) $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) = \alpha f(x, y)$

Příklad:

Níže uvedená zobrazen jsou lineární (ověřte):

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} x - y$,
- $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $m \times n$,
- $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, kde $\mathcal{P}_n$ je prostor všech polynomů maximálně stupně n $(p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$ a $D(p) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Příklad:

Níže uvedená zobrazení lineární nejsou (ověřte):

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} x - y + 1$,
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2$,
- $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}^T.\mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $n \times n$,
- $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $B(p) \overset{\text{def}}{=} p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Lineární zobrazení LVP

Příklad:

Níže uvedená zobrazení vybraných LVP jsou lineární (ověřte):

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) \overset{\text{def}}{=} x - y$
- A
- D … $x^{n-1} + \cdots +$

a

a) $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 1 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + 1 = (x_1 - y_1) + 1 + (x_2 - y_2) + 1 + (-1 - 1 + 1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - 1 \neq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

b) $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x - \alpha y + 1 = \alpha(x - y + 1) - \alpha + 1 = \alpha f(x, y) - \alpha + 1 \neq \alpha f(x, y)$

Příklad:

Níže uvedená zobrazení … (ověřte):

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) \overset{\text{def}}{=} x - y + 1$,
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2$,
- $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ A(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}^T.\mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $n \times n$,
- $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ B(p) \overset{\text{def}}{=} p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Lineární zobrazení LVP

Každá matice řádu $m \times n$ reprezentuje nějaké lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.
Toto zobrazení je dáno násobením matice a (sloupcového) vektoru.

Příklad:

Níže uvedená zobrazení vybraných LVP js

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y$,
- $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $m \times n$,
- $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, kde $\mathcal{P}_n$ je prostor všech polynomů maximálně stupně n $(p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$ a $D(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Příklad:

Níže uvedená zobrazení lineární nejsou (ověřte):

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y + 1$,
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2$,
- $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^T.\mathbf{A}.\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je matice řádu $n \times n$,
- $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $B(p) \stackrel{\text{def}}{=} p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Lineární zobrazení LVP

Tvrzení:

Je-li $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení, platí:

- $A(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, (pozor na obecně různá $\boldsymbol{o}$ vlevo a vpravo!)
- $A(-\boldsymbol{u}) = -A(\boldsymbol{u})$.

Důkaz

- $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}:\ A(0\boldsymbol{u}) = 0A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$,
- $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: -\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \Longrightarrow A(-\boldsymbol{u}) = A\big((-1)\boldsymbol{u}\big) = (-1)A(\boldsymbol{u}) = -A(\boldsymbol{u})$.

Tvrzení:

Lineární zobrazení $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je určeno jednoznačně obrazy vektorů (libovolné) báze na $\mathcal{U}$.

Důkaz

- $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na $\mathcal{U} \Longrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n$,
- $A(\boldsymbol{u}) = A(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n) = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + \alpha_n A(\boldsymbol{a}_n)$,
- známe-li ale $\boldsymbol{b}_1 = A(\boldsymbol{a}_1) \in \mathcal{V}$ atd., umíme určit i $A(\boldsymbol{u})$.

Lineární zobrazení LVP

Příklad

Nechť $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení a nechť platí $A(1,1) = (1,0,1)$ a $A(1,-1) = (0,1,0)$. Určete $A(2,3)$.

Řešení

- nejdříve bychom měli ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1)$ tvoří na $\mathbb{R}^2$ bázi (nebudeme provádět, vyplyne z následujícího kroku – kde?),
- výpočet souřadnic vektoru $\boldsymbol{u} = (2,3)$ v bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ $\quad (\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \alpha_1 = 5/2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{array},$$

- $A(2,3) = A(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2) = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2) = \frac{5}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$

2. Obor hodnot, nulový prostor (jádro) LZ

Obor hodnot LZ

Definice:

Pod *oborem hodnot* lineárního zobrazení $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \to \mathcal{V}$ rozumíme:

- $\mathcal{H}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}: \exists \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u})\}$.

Poznámka:

Obor hodnot můžeme ve zkratce definovat rovněž takto:

- $\mathcal{H}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A(\mathcal{U})$.

Tvrzení:

- $\mathcal{H}(A)$ je podprostor $\mathcal{V}$,*
- $\dim \mathcal{H}(A) \leq \dim \mathcal{V}$.

Důkaz (jen první odrážka, druhá z ní vyplývá)

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}(A) \Rightarrow \exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{v})$,
- $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in \mathcal{H}(A)$,
- $\alpha \boldsymbol{x} = \alpha A(\boldsymbol{u}) = A(\alpha \boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}(A)$.

* Jako jsme v případě definičního oboru A mohli bez újmy na obecnosti ztotožnit $\mathcal{D}(A)$ s $\mathcal{U}$, můžeme i nyní předpokládat, že $\mathcal{H}(A) = \mathcal{V}$.

Obor hodnot LZ

Příklad:

Zjistěte, zda vektor $\boldsymbol{b} = (5,1,5)$ patří do $\mathcal{H}(A)$, je-li $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení a $A(1,1) = (1,0,1)$ a $A(1,-1) = (0,1,0)$.

Řešení

- předpokládejme, že máme ověřeno, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1)$ tvoří na $\mathbb{R}^2$ bázi, tedy že $\mathcal{H}(A) = \mathcal{L}\big(A(1,1), A(1,-1)\big) = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0))$ (tentokrát bychom ověřit museli),
- ptáme se, zda existují $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $\boldsymbol{b} = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 1 \end{array},$$

- $\boldsymbol{b} \in \mathcal{H}(A)$.

Nulový prostor (jádro) LZ

Věta:

Pod *nulovým prostorem* (*jádrem*) lineárního zobrazení $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \to \mathcal{V}$ rozumíme:

- $\mathcal{N}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}$.

Poznámka:

V literatuře se rovněž setkáváme s označením „$\ker A$“.

Tvrzení:

- $\mathcal{N}(A)$ je podprostor $\mathcal{U}$,
- $\dim \mathcal{N}(A) \leq \dim \mathcal{U}$.

Důkaz (opět jen první odrážka)

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{N}(A) \Rightarrow \ A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}, \ \ A(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o},$
- $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} \ \ \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathcal{N}(A),$
- $A(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha A(\boldsymbol{u}) = \alpha \boldsymbol{o} \ \ \Rightarrow \alpha \boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(A).$

Nulový prostor (jádro) LZ

Příklad:

Určete $\mathcal{N}(A)$, je-li $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení a $A(1,1,-1) = (1,1)$, $A(1,-1,0) = (-2,0)$ a $A(1,1,1) = (0,1)$.

Řešení

- nutno ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$ tvoří na $\mathbb{R}^3$ bázi (tentokrát opět ověřit musíme - DÚ),
- hledáme všechna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ taková, že $A(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3) = \alpha_1 A(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{a}_2) + \alpha_3 A(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{o}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou souřadnice vektorů z $\mathcal{N}(A)$ v bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$)

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_3 = t \in \mathbb{R}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}t, \alpha_1 = -t$,
- $\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = -t(1,1,-1) - \frac{1}{2}t(1,-1,0) + t(1,1,1) = \cdots = t(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2);\ t \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}\left((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)\right) = \mathcal{L}((-1,1,4))$, $\dim \mathcal{N}(A) = 1$.

Věta o dimenzi

Věta:

Nechť $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení, pak platí

- $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{H}(A) = \dim \mathcal{U}.$

Poznámka:

- Větu možno interpretovat jako *zákon zachování dimenze*.
- Srovnejte s větou o dimenzi pro matice (viz lekce 4).

3. Maticová reprezentace LZ

Matice LZ

Poznámka:

- Zatím jsme ukázali, že každá matice řádu $m \times n$ reprezentuje nějaké lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (viz zde).
- Nyní ukážeme, že každému LZ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lze přiřadit matici řádu $m \times n$ ...
- ... a taky se budeme zabývat (později) otázkou, do jaké míry je toto přiřazení jednoznačné.

Matice LZ

Pozorování:

- $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení,
- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ a $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ jsou báze na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{j=1}^{n} u_j\boldsymbol{a}_j$,
  - $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}: \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{b}_1 + v_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + v_m\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} v_i\boldsymbol{b}_i$,
- $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j A(\boldsymbol{a}_j)$,
- $A(\boldsymbol{a}_j) = a_{1j}\boldsymbol{b}_1 + a_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i$,
- $\boldsymbol{v} = \begin{cases} A(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j\right)\boldsymbol{b}_i \\ \sum_{i=1}^{m} v_i\boldsymbol{b}_i \end{cases} \Rightarrow \ v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$,
- označme: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, pak $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) \ \Leftrightarrow \ \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}$.

Matice LZ

Pozorování:

- $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení,
- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ a $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ jsou báze na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{a}_j$,
  - $\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{b}_1 + v_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + v_m\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} v_i \boldsymbol{b}_i$,
- $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) = A\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j A(\boldsymbol{a}_j)$,
- $A(\boldsymbol{a}_j) = a_{1j}\boldsymbol{b}_1 + a_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{b}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i$,
- $\boldsymbol{v} = \begin{cases} A(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j\right)\boldsymbol{b}_i \\ \sum_{i=1}^{m} v_i \boldsymbol{b}_i \end{cases} \Rightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$,
- označme: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$, pak $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}$.

souřadnice $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{A}$ (na $\mathcal{U}$)

souřadnice $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ (na $\mathcal{V}$)

„souřadnice“ A v bázích $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (na $\mathcal{U}, \mathcal{V}$)
sloupce $\mathbf{A}$ = souřadnice $A(\boldsymbol{a}_i)$ v bázi $\mathcal{B}$

Matice LZ

Poznámka (shrnutí):

- Každému LZ $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lze tedy pro zadané báze na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ přiřadit matici řádu $\dim \mathcal{V} \times \dim \mathcal{U}$.
- Tato matice je pro konkrétní báze určena jednoznačně, ...
- ... je však na volbě (obou) bází závislá.
- Jedná se vlastně o souřadnicovou reprezentaci zadaného zobrazení, ...
- ... které v této reprezentaci přechází na prosté maticové násobení (viz též dále):
  $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) \ \Leftrightarrow \ \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}.$

Matice LZ

Příklad:

Nechť $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $A(1,1,-1) = (1,1)$, $A(1,-1,0) = (-2,0)$ a $A(1,1,1) = (0,1)$. Určete matici tohoto zobrazení v bázích $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$, a $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, kde $\boldsymbol{b}_1 = (1,0)$ a $\boldsymbol{b}_2 = (0,1)$.

Řešení

- opět je nutno ověřit, že vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ a $\boldsymbol{a}_3$ skutečně tvoří na $\mathbb{R}^3$ bázi (věříme ale, že zadání je správné),
- vektory $\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{b}_2$ tvoří kanonickou bázi na $\mathbb{R}^2$,
- vektory $\boldsymbol{c}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{c}_2 = (-2,0)$ a $\boldsymbol{c}_3 = (0,1)$ obsahují souřadnice obrazů prvků báze $\mathcal{A}$ přímo v bázi $\mathcal{B}$,
- matice odpovídající v bázích $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ zobrazení A má tedy tvar $\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3}$.
- Můžeme tedy psát $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, kde v_j jsou souřadnice $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u})$ v bázi $\mathcal{B}$ a u_i souřadnice $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{A}$.

Matice LZ

Příklad:

Nechť $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $A(1,1,-1) = (1,1)$, $A(1,-1,0) = (-2,1)$ a $A(1,1,1) = (0,1)$. Určete matici tohoto zobrazení v bázích $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1)$, a $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, kde $\boldsymbol{b}_1 = (1,1)$ a $\boldsymbol{b}_2 = (1,-1)$.

Řešení

- vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ a $\boldsymbol{a}_3$ jsou stejné jako v předcházejícím příkladu, věříme tedy, že tvoří na $\mathbb{R}^3$ bázi,
- měli bychom ověřit, že vektory $\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{b}_2$ tvoří bázi na $\mathbb{R}^2$,

- vektory $\boldsymbol{c}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{c}_2 = (-2,1)$ a $\boldsymbol{c}_3 = (0,1)$ jsou obrazy prvků báze $\mathcal{A}$ v kanonické bázi na $\mathbb{R}^2$, nutno najít jejich souřadnice v bázi $\mathcal{B}$ (viz lekce 3)

  $\boldsymbol{c}_1: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G–J}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $\quad \boldsymbol{c}_2: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G–J}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right)$, $\quad \boldsymbol{c}_3: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G–J}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$,

  $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3: \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G–J}} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 \end{array}\right)$,

- matice odpovídající v bázích $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ zobrazení A má tedy tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

- a můžeme psát $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, kde v_j jsou souřadnice $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u})$ v bázi $\mathcal{B}$ a u_i souřadnice $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{A}$.

Transformace matice LZ (při změně bází)

Pozorování:

- $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) \to \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}$, příp. $\mathbf{v}' = \mathbf{A}'.\mathbf{u}'$:
  - $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} / \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ / $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ / $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,
  - $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \dots \\ u'_n \end{pmatrix} / \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_m \end{pmatrix}$ - souřadnice $\boldsymbol{u}$ / $\boldsymbol{v}$ v bázi $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n\}$ / $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \dots, \boldsymbol{b}'_m\}$, $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$,
- transformace souřadnic vektoru (viz lekce 3, obrazovky 25 a 26)
  - $\mathbf{u} = \mathbf{T}'_{\mathcal{U}}.\mathbf{u}' = \mathbf{T}_{\mathcal{U}}^{-1}.\mathbf{u}'$ (matice $n \times n$), $\mathbf{v} = \mathbf{T}'_{\mathcal{V}}.\mathbf{v}' = \mathbf{T}_{\mathcal{V}}^{-1}.\mathbf{v}'$ (matice $m \times m$),
- transformace matice LZ
  - $\mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u} \to \mathbf{T}'_{\mathcal{V}}.\mathbf{v}' = \mathbf{A}.(\mathbf{T}'_{\mathcal{U}}.\mathbf{u}') \to \mathbf{v}' = \mathbf{T}'^{-1}_{\mathcal{V}}.(\mathbf{A}.(\mathbf{T}'_{\mathcal{U}}.\mathbf{u}')) = \left(\mathbf{T}'^{-1}_{\mathcal{V}}.\mathbf{A}.\mathbf{T}'_{\mathcal{U}}\right).\mathbf{u}' \to \mathbf{A}' = \mathbf{T}'^{-1}_{\mathcal{V}}.\mathbf{A}.\mathbf{T}'_{\mathcal{U}} = \mathbf{T}_{\mathcal{V}}.\mathbf{A}.\mathbf{T}_{\mathcal{U}}^{-1}$.

Podobné matice

Poznámka:

- $A: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (*lineární transformace*), $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}) \to \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}$ / $\mathbf{v}' = \mathbf{A}'.\mathbf{u}'$,
- transformace souřadnic
  - $\mathbf{u} = \mathbf{T}'.\mathbf{u}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{u}'$, $\mathbf{v} = \mathbf{T}'.\mathbf{v}' = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{v}'$,
  - $\mathbf{v}' = \cdots = (\mathbf{T}'^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}').\mathbf{u}' \to \mathbf{A}' = \mathbf{T}'^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}' = \mathbf{T}.\mathbf{A}.\mathbf{T}^{-1}$.

Definice:

Čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazveme *podobnými*, pokud existuje regulární matice $\mathbf{T}$ (stejného řádu) taková, že

- $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}$.

Převod jedné matice na druhou pak nazýváme *podobnostní transformací*.

Poznámka:

Podobné matice reprezentují jednu a tutéž lineární transformaci maticově reprezentovanou v různých bázích. Odtud název *podobné matice*.

4. Operace s LZ

Skládání LZ

Tvrzení:

Nechť $A: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $B: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ jsou LZ a $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jim odpovídající matice pro báze $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ definované na prostorech $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$. Pak platí:

- $C: \mathcal{U} \to \mathcal{W}: C \stackrel{\text{def}}{=} A \circ B$ $[C(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} B(A(\boldsymbol{u}))]$ je lineární zobrazení,
- matice $\mathbf{C}$ přiřazená tomuto zobrazení v bázích $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ je dána $\mathbf{C} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

Důkaz:

- linearita
  - $C(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = B\big(A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}')\big) = B\big(A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{u}')\big) = B\big(A(\boldsymbol{u})\big) + B\big(A(\boldsymbol{u}')\big) = C(\boldsymbol{u}) + C(\boldsymbol{u}')$,
  - $C(\alpha\boldsymbol{u}) = B\big(A(\alpha\boldsymbol{u})\big) = B\big(\alpha A(\boldsymbol{u})\big) = \alpha B\big(A(\boldsymbol{u})\big) = \alpha C(\boldsymbol{u})$;
- maticová reprezentace
  - $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u}), \mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{w} = B(\boldsymbol{v}), \mathbf{w} = \mathbf{B}.\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{w} = C(\boldsymbol{u}), \mathbf{w} = \mathbf{C}.\mathbf{u}$,
  - $\mathbf{w} = \mathbf{B}.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = (\mathbf{B}.\mathbf{A}).\mathbf{u} = \mathbf{C}.\mathbf{u}$ [platí $\forall \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}$, kde $n = \dim \mathcal{U}$, $u_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, speciálně pro vektory kanonické báze]

    $\to \mathbf{C} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

Další operace

Poznámka:

Lineární zobrazení $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ a $B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ můžeme dále sčítat a násobit číslem:

- $(A + B)(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} A(\boldsymbol{u}) + B(\boldsymbol{u})$,
- $(\alpha A)(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha A(\boldsymbol{u})$,

přičemž výsledkem jsou opět lineární zobrazení $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. (Umíme dokázat?)

V maticové reprezentaci (v libovolných bázích) odpovídá těmto operacím sčítání matic a násobení matic číslem.

Poznámka:

Množina všech lineárních zobrazení $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tvoří LVP, stačí zvolit:

- $O(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{o}$,
- $(-A)(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} -A(\boldsymbol{u})$.

Obě speciální zobrazení jsou lineárními zobrazeními $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$.

V maticové reprezentaci jim odpovídají nulová matice a matice opačná (opačná znaménka u všech prvků).

Inverzní zobrazení

Definice:

Lineární zobrazení $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{V}$ nazveme *prostým*, pokud

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}: \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \;\; \Rightarrow A(\boldsymbol{u}) \neq A(\boldsymbol{v}) \;\; [A(\boldsymbol{u}) = A(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}]$.

Tvrzení:

$A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je prosté lineární zobrazení, právě když platí:

- $\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{o}\}$,*
- $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{H}(A)$.**

Poznámka:

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{V} = \mathcal{H}(A)$. Pak prostotu lineárního zobrazení ekvivalentně vyjadřuje podmínka

- $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = n$.

Matice tohoto zobrazení ($\mathbf{A}$) pak nutně bude (v libovolných bázích)

- řádu $n \times n$ (čtvercová) ,
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{o}\}$, tedy $h(\mathbf{A}) = n$,
- a ....

* a) A je prosté $\Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A})$ nemůže obsahovat žádný další vektor kromě $\boldsymbol{o}$; b) $\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{o}\} \Rightarrow [A(\boldsymbol{u}) = A(\boldsymbol{v}) \Rightarrow A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Rightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}]$

** $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{H}(A) + \underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_{0}$

Inverzní zobrazení

Tvrzení:

Nechť $A: \mathcal{U} = \mathcal{D}(A) \to \mathcal{V} = \mathcal{H}(A)$ je prosté lineární zobrazení. Pak existuje prosté lineární zobrazení $B: \mathcal{V} = \mathcal{D}(B) \to \mathcal{U} = \mathcal{H}(B)$ takové, že

- $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}: B\big(A(\boldsymbol{u})\big) = \boldsymbol{u}$.

Definice:

Toto zobrazení nazveme *inverzním* k zobrazení A a budeme označovat A^{-1}.

Poznámka:

Inverznímu zobrazení odpovídá v maticové reprezentaci matice inverzní k matici zobrazení původního:

- $A \to \mathbf{A},\ A^{-1} \to \mathbf{B} \ \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Matice $\mathbf{A}$ je tedy regulární.*

* Protože inverzní zobrazení je rovněž prosté, je nutně regulární i matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Srovnejte s lekcí 2, poznámka na obrazovce 23.

Konec lekce 5.