Řešitelnost SLAR

Lineární algebra

lekce 4

Osnova

1. Opakování
2. Sloupcový prostor matice, hodnost
3. Nulový prostor matice
4. Řešitelnost SLAR

1. Opakování

Lineární obal, báze na LVP

Shrnutí:

- Lineární obal podmnožiny $\mathcal{W}$ prostoru $\mathcal{V}$ tvoří všechny (konečné) lineární kombinace prvků (vektorů) z $\mathcal{W}$, značíme ho $\mathcal{L}(\mathcal{W})$.

- Speciálně pro konečné množiny $\mathcal{W} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathcal{V}$ je $\mathcal{L}(\mathcal{W}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathcal{V} : \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \alpha_k \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\}$.

- Lineárně nezávislou podmnožinu $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{V}$, která $\mathcal{V}$ generuje, tedy $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathcal{B})$, nazveme *bází* prostoru $\mathcal{V}$.

- Speciálně na (netriviálním) konečnědimenzionálním prostoru $\mathcal{V}$ $(\dim \mathcal{V} = n \in \mathbb{N})$ je bází:
  - každá lineárně nezávislá množina (soustava) vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathcal{V}$, jejíž počet prvků je roven $\dim \mathcal{V}$,*
  - každá množina (soustava) vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathcal{V}$, jejíž počet prvků je roven $\dim \mathcal{V}$ a která splňuje $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.**

* Taková soustava už nutně prostor generuje.

** Taková soustava je už nutně lineárně nezávislá.

Soustava lineárních algebraických rovnic (SLAR)

Shrnutí:

- $$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- *rozšířená matice soustavy*:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matice soustavy *(sloupcový) vektor pravých stran*

Aritmetické vektory (značení)

Shrnutí:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \boldsymbol{a}$,
- $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}$.

2. Sloupcový prostor matice, hodnost

Sloupcový prostor matice

Definice:

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je matice řádu $m \times n$. Označme $\mathbf{a}_j^{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ její j-tý sloupec,

resp. jemu odpovídající aritmetický vektor $\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{S}} = \left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\right) \in \mathbb{R}^m$.

Pak pod *sloupcovým prostorem* matice $\mathbf{A}$ budeme rozumět: $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{S}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{S}}, \dots, \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{S}}) \subset \mathbb{R}^m$.

Tvrzení:

$\mathcal{S}(\mathbf{A})$ je podprostor $\mathbb{R}^m$.

Definice:

Dimenzi sloupcového prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ nazýváme *(sloupcovou) hodností matice* a označujeme ji $h_{\mathrm{s}}(\mathbf{A})$, $h_{\mathrm{s}}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Pozorování:

$\mathcal{S}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow h_{\mathrm{s}}(\mathbf{A}) \leq m$ (= počet řádků matice $\mathbf{A}$)

Sloupcový prostor matice

Příklad:

Určete sloupcovou hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a nalezněte (alespoň jednu) bázi na jejím sloupcovém prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Pozorování:

- Pokud v množině vektorů nahradíme kterýkoliv z nich lineární kombinací vektorů z této množiny, kdy u nahrazovaného vektoru stojí v této lineární kombinaci nenulový koeficient, lineární obal množiny se nezmění.
- Pokud prohodíme dva libovolné vektory v zadané množině vektorů, lineární obal této množiny se nezmění.
- **Přesně toto ale děláme v (řádkových) úpravách v Gaussově eliminační metodě**.

Tvrzení:

- Nenulové řádky horní trojúhelníkové matice v řádkově odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé.

Řešení

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r4:=r4-2r1]{\substack{r2:=r2+r1 \\ r3:=r3-r1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r4:=2r4-3r3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=-r3/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\mathcal{B} = \{(1,2,1), (0,1,1)\}, \quad \dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = 2$.

Sloupcový prostor matice

Příklad:

Určete sloupcovou hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a nalezněte (alespoň jednu) bázi na jejím sloupcovém prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Řešení

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r4:=r4-2r1]{\substack{r2:=r2+r1 \\ r2:=r3-r1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r4:=2r4-3r3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=-r3/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\mathcal{B} = \{(1,2,1), (0,1,1)\}, \quad \dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = 2$.

Poznámka:

- sloupcový zápis $\mathcal{B}_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
- jiná báze $\mathcal{B}' = \{(1,2,1), (1,0,-1)\}$,
- pozor na bázi $\mathcal{B}'$, bylo-li součástí úprav prohození řádků.

Řádkový prostor matice

Definice:

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ označme $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{R}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ aritmetický vektor odpovídající jejímu i-tému řádku.

Pak pod *řádkovým prostorem* matice $\mathbf{A}$ budeme rozumět: $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{R}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{R}}, \dots, \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{R}}) \subset \mathbb{R}^n$.

Definice:

Dimenzi řádkového prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme *(řádkovou) hodností matice* a označujeme $h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A})$,
$h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Pozorování:

- $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A}) \leq n$ (= počet sloupců matice $\mathbf{A}$),
- $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^T)$, $h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A}) = h_{\mathrm{S}}(\mathbf{A}^T)$.

Hodnost matice

Věta:

$h_{\mathrm{S}}(\mathbf{A}) = h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A})$

Definice:

Číslo $h(\mathbf{A}) \overset{\mathrm{def}}{=} h_{\mathrm{S}}(\mathbf{A}) = h_{\mathrm{R}}(\mathbf{A})$ nazýváme *hodností* matice $\mathbf{A}$.

Pozorování:

- $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$ (= menší z čísel počet sloupců / počet řádků matice $\mathbf{A}$),
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$,
- regulární matice $n \times n$ má hodnost n.

3. Nulový prostor matice

Nulový prostor matice

Definice:

Pod *nulovým prostorem* (*jádrem*) matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ rozumíme podmnožinu $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$, kde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{o}$ jsou sloupcové vektory (matice řádů $n \times 1$ a $m \times 1$) a $\mathbf{A}.\mathbf{x}$ označuje maticové násobení.

Poznámka:

Nulový prostor matice řádu $m \times n$ hledáme jako řešení soustavy m homogenních SLAR (s nulovou pravou stranou) o n neznámých.

Tvrzení:

Nulový prostor matice řádu $m \times n$ je podprostor $\mathbb{R}^n$.

Důkaz

- $\boldsymbol{o} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$
- $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}.\mathbf{y} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{A}.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{A}.\mathbf{y} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$
- $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{A}.(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}.\mathbf{x} = \alpha\mathbf{o} = \mathbf{o} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$

Nulový prostor matice

Příklad:

Nalezněte nulový prostor matice $\mathbf{A}$, alespoň jednu bázi na něm a určete jeho dimenzi, je-li

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{pmatrix}.$$

Řešení (Gaussova eliminace)

- $\mathbf{A}.\mathbf{x}=\mathbf{o},\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$
- $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&0\\2&4&6&8&0\\3&6&8&10&0\end{array}\right)\xrightarrow[r3:=r3-3r1]{r2:=r2-2r1}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r3:=r3-r2}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow x_4=s,\ x_3=-2s,\ x_2=t,\ x_1=2s-2t,$

  $s,t\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2s-2t,t,-2s,s);\ s,t\in\mathbb{R}\}$

  $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:=(x_1,x_2,x_3,x_4)=s(2,0,-2,1)+t(-2,1,0,0);\ s,t\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((2,0,-2,1),(-2,1,0,0))$
- $\mathcal{B}=\{(2,0,-2,1),(-2,1,0,0)\}$
- $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A})=2$

Věta o dimenzi

Věta:

Nechť $\mathbf{A}$ je matice řádu $m \times n$ (m řádků a n sloupců), pak platí

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n.$$

Poznámka:

Vzhledem k tomu, že $\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$, můžeme tvrzení věty psát ve tvaru:

$$h(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n.$$

3. Řešitelnost SLAR

Obecné řešení SLAR

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{x}_\mathrm{P}$ je nějaké (partikulární, částečné) řešení obecně nehomogenní SLAR,

$$\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (*)$$

a $\mathbf{x}_0$ je obecné (parametrizované) řešení soustavy homogenní,

$$\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o},$$

pak lze obecné řešení nehomogenní soustavy (*) psát jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{x}_0.$$

Důkaz

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{x}_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{A}.(\mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}.\mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{A}.\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$
- $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}.(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{P}) = \mathbf{A}.\mathbf{x} - \mathbf{A}.\mathbf{x}_\mathrm{P} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{P} = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{x}_0$

Podmínky řešitelnosti SLAR

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{x}_\mathrm{P}$ je nějaké (partikulární, částečné) řešení obecně nehomogenní SLAR $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (*) a $\mathbf{x}_0$ je obecné řešení soustavy homogenní, $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o}$, pak lze obecné řešení nehomogenní soustavy (*) psát jako $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathrm{P} + \mathbf{x}_0$.

Pozorování: (jednoznačnost řešení SLAR)

- Pokud řešení soustavy (*) existuje, pak je jednoznačné, právě když $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 0$.
- Podle věty o zachování dimenze to nastává, právě když $h(\mathbf{A}) = n$, kde n je počet neznámých (sloupců matice $\mathbf{A}$).
- Je-li naopak $h(\mathbf{A}) < n$, řešení soustavy (*), pokud existuje, jednoznačné není a je parametrizováno pomocí $n - h(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$ parametrů (koeficientů lineárních kombinací vybrané báze na $\mathcal{N}(\mathbf{A})$).

Pozorování: (existence řešení SLAR)

- (Partikulární) řešení soustavy (*) existuje, právě když vektor pravých stran patří do sloupcového prostoru matice soustavy, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
- To nastává, právě když mají matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířená matice soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ stejnou hodnost.

Poznámka:

- Řešení homogenní SLAR existuje vždy („přinejhorším“ je nulové). Proč?

Frobeniova věta

Věta: (existence a jednoznačnost řešení SLAR)

- (Obecně) nehomogenní SLAR, $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$,* má řešení, právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.
- V tom případě:
  - pokud je hodnost matice soustavy rovna počtu neznámých, $h(\mathbf{A}) = n$, je toto řešení určeno jednoznačně,
  - pokud je hodnost matice soustavy menší než počet neznámých, $h(\mathbf{A}) < n$,** není toto řešení určeno jednoznačně a je parametrizováno $n - h(\mathbf{A})$ parametry.

* $\mathbf{A}$ je matice $m \times n$, $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor $n \times 1$ – neznámé, $\mathbf{b}$ je sloupcový vektor $m \times 1$ – pravé strany.

** Případ $h(\mathbf{A}) > n$ nemůže nastat. Proč?

Konec lekce 4.