Lineární vektorové prostory

Lineární algebra

lekce 3

Osnova

1. Aritmetické vektory
2. Lineární vektorové prostory (LVP)
3. Lineární závislost/nezávislost vektorů
4. Báze, dimenze LVP
5. Souřadnice vektorů
6. Podprostory LVP

1. Aritmetické vektory

Aritmetické vektory

Definice:

Pod *aritmetickými vektory* rozumíme uspořádané *n*-tice čísel z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), pro které definujeme operace sčítání a násobení číslem (α):

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$,
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \overset{\text{def}}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$,

a relaci rovnosti

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \dots, n\colon\ a_i = b_i$.

Poznámka (a úmluva o značení):

Aritmetické vektory úzce souvisejí se sloupcovými či řádkovými vektory (speciálními maticemi).
Domluvme se na následujícím značení:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \boldsymbol{a}$,
- $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}$ [velká písmena rezervujeme pro matice řádů $(m > 1) \times (n > 1)$],
- $(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) = \mathbf{a}^T$.

Vlastnosti aritmetických vektorů

Pozorování: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\ (\mathbb{C}^n);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})]$

- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$,
- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{o} \stackrel{\text{def}}{=} (0,0, \dots, 0)$,
- $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, kde $-\boldsymbol{a} \stackrel{\text{def}}{=} (-\mathbf{1})\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$,
- $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$,
- $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$,
- $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$,
- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ ($0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, $\alpha\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$).

Varování:

- různá „plus“: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ vs. $\alpha + \beta$,
- různá „krát“: $\alpha\boldsymbol{a}$ vs. $\alpha\beta$.

Poznámka:

Aritmetické vektory souvisejí se souřadnicovou reprezentací obecných vektorů. Viz dále.

2. Lineární vektorové prostory

Lineární vektorový prostor, axiomy LVP

Definice:

Množinu $\mathcal{V}$ nazveme *(lineárním) vektorovým prostorem* (LVP) nad tělesem reálných (komplexních) čísel, pokud jsou na ní definovány operace (& relace rovnosti jako speciální relace ekvivalence)

- *sčítání* (+):$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$,
- *násobení číslem* („nic"): $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ($\mathbb{C} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$)

splňující tzv. *axiomy LVP* [$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathcal{V}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)]:

- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, [komutativita sčítání]
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, [asociativita sčítání]
- $\exists \boldsymbol{o} \in \mathcal{V} \ \ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}: \boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$, [existence nulového vektoru]
- $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V} \ \ \exists (-\boldsymbol{a}) \in \mathcal{V}: \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, [existence opačného vektoru (ke každému vektoru)]
- $\alpha(\beta \boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$, [asociativita násobení (číslem)]
- $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$, [distributivita násobení (číslem) vůči vektorovému sčítání]
- $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$, [distributivita násobení (číslem) vůči sčítání čísel]
- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Důsledky axiomů LVP

Tvrzení:

- nulový vektor je určen jednoznačně, navíc platí i $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
- opačný vektor je pro zadaný vektor $\boldsymbol{a}$ určen jednoznačně, navíc platí i $(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}\colon\ 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\colon\ \alpha\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}\colon\ (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

Důkazy:

- $\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_1 + \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2$, komutativita sčítání
- $(-\boldsymbol{a})_1 + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})_2 = \begin{cases} [(-\boldsymbol{a})_1 + \boldsymbol{a}] + (-\boldsymbol{a})_2 = \boldsymbol{o} + (-\boldsymbol{a})_2 = (-\boldsymbol{a})_2 \\ (-\boldsymbol{a})_1 + [\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})_2] = (-\boldsymbol{a})_1 + \boldsymbol{o} = (-\boldsymbol{a})_1 \end{cases} \Rightarrow (-\boldsymbol{a})_1 = (-\boldsymbol{a})_2$, komutativita sčítání
- $\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{a} = (1+0)\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a} \ \Leftrightarrow \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + 0\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{a}$
- $\begin{cases} \alpha = 0\colon\ \ 0\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}\ \ (\text{předchozí odrážka}) \\ \alpha \neq 0\colon \alpha\boldsymbol{o} + \boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{o} + 1\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{o} + \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{o} + \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\right) = \alpha\left[\boldsymbol{o} + \left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\right)\right] = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\right) = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \end{cases}$
- $(-1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a} + 1\boldsymbol{a} = (-1+1)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ (+ jednoznačnost opačného vektoru)

Poznámka:

Jednoprvková množina $\mathcal{V}_0 = \{\boldsymbol{o}\}$ je LVP. Tento LVP budeme nazývat *triviálním*.

Příklady nearitmetických LVP

Poznámka:

Aritmetické LVP jsou LVP ve smyslu výše uvedené definice, existují ale i další LVP.

Příklad:

- množina $\mathcal{F}$ všech spojitých (reálných/komplexních) funkcí definovaných na zadaném intervalu I:
  - $f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I: f(x) = g(x)$,
  - $(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$, (součet dvou spojitých funkcí je funkce spojitá)
  - $(\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x)$, (násobek spojité funkce je funkce spojitá)
  - $o(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$. (konstantní funkce je spojitá)

- množina všech polynomů $\mathcal{P}$, množina $\mathcal{P}_n$ všech polynomů stupně maximálně n (na intervalu I)

- množina všech (konvergentních) posloupností z $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$
  - $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{+\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n = b_n$,
  - $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{+\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_n + b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, (součet konvergentních posloupností je konvergentní posloupnost)
  - $\alpha\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, (násobek konvergentní posloupnosti je konvergentní posloupnost)
  - $\boldsymbol{o} \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}_{n=1}^{+\infty}$. (konstantní posloupnost je konvergentní)

3. Lineární závislost/nezávislost vektorů

Lineární kombinace vektorů

Definice:

Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathcal{V}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Pod *lineární kombinací* vektorů $\boldsymbol{a}_k$ s koeficienty α_k rozumíme vektor $\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$:

$$\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_k \boldsymbol{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n.$$

Je-li $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, nazveme příslušnou *lineární kombinaci nulovou*, pokud jsou naopak všechny koeficienty lineární kombinace nulové, nazveme ji *triviální*.

Poznámka:

- Pořadí sčítání a závorkování není podstatné (komutativita a asociativita vektorového sčítání).
- Triviální lineární kombinace je vždy nulová, naopak to ale obecně neplatí.

Lineární závislost/nezávislost vektorů

Definice:

Množinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ nazveme *lineárně nezávislou*, pokud každá její konečná podmnožina splňuje, že jediná nulová lineární kombinace vektorů z této podmnožiny je triviální:

$$\forall \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathcal{W}\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}):\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

V opačném případě nazveme množinu $\mathcal{W}$ *lineárně závislou*.

Poznámka:

Speciálně soustava vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathcal{V}$ je lineárně nezávislá, pokud je nulová jen její triviální lineární kombinace, tedy pokud platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Poznámka:

V „opačném případě“ v definici znamená, že existuje aspoň jedna konečná podmnožina $\mathcal{W}$, která je lineárně závislá (existuje tedy její netriviální nulová lineární kombinace):

$$\exists \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathcal{W}\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}):\ \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o} \quad \wedge \quad (\alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_n \neq 0).$$

Lineární závislost/nezávislost vektorů

Příklad:

Zjistěte, zda je zadaná množina aritmetických vektorů lineárně závislá či nezávislá:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3),\ \boldsymbol{a}_2 = (3,2,1),\ \boldsymbol{a}_3 = (1,3,2).$$

Řešení:

- $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$
  - $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) + \alpha_3(1,3,2) = (0,0,0)$
  - $(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (3\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, 2\alpha_3) = (0,0,0)$
  - $(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0)$
- $$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
- zadaná množina vektorů je lineárně nezávislá

Lineární závislost/nezávislost vektorů

Příklad:

Zjistěte, zda je zadaná množina aritmetických vektorů lineárně závislá či nezávislá:

$\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,3,2)$.

Řešení:

- $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$
  - $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) + \alpha_3(1,3,2) = (0,0,0)$
  - $(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (3\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, 2\alpha_3) = (0,0,0)$
  - $(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0)$
- $$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
- zadaná množina vektorů je lineárně nezávislá

4. Báze, dimenze LVP

Lineární obal, generátory

Definice:

Nechť $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, pak množinu

$$\mathcal{L}(\mathcal{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{b} \in \mathcal{V} : \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n(\boldsymbol{b})} \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k \in \mathcal{W},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \right\}$$

nazveme *lineárním obalem* množiny $\mathcal{W}$.

Poznámka:

Speciálně pro konečné podmnožiny $\mathcal{V}$ platí

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \{\boldsymbol{b} \in \mathcal{V} : \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \alpha_k \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\}.$$

Definice:

Řekneme, že množina $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *generuje množinu* $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$, pokud

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{W}).$$

Vektory z množiny $\mathcal{W}$ pak nazýváme *generátory* množiny $\mathcal{M}$.

Poznámka:

- $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}(\mathcal{W})$,
- $\boldsymbol{o} \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$.

Lineární obal, generátory

Příklad:

Zjistěte, zda vektor $\boldsymbol{b} = (5,6,7)$ patří do lineárního obalu vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,1)$.

Řešení:

- $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$
  - $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) = (5,6,7)$
  - $(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (3\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2) = (5,6,7)$
  - $(\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2) = (5,6,7)$
- $$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 &= 5 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 7 \end{aligned}$$
- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ \underbrace{3}_{\mathbf{a}_1} & \underbrace{1}_{\mathbf{a}_2} & \underbrace{7}_{\mathbf{b}} \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = 2$
- $\boldsymbol{b} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ a platí $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

Báze na LVP

Definice:

Lineárně nezávislou podmnožinu prostoru $\mathcal{V}$, která $\mathcal{V}$ generuje, nazveme *bází* prostoru $\mathcal{V}$.

Věta:

- Na každém LVP (kromě triviálního prostoru $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{o}\}$) existuje báze, ...
- není ale určena jednoznačně (obecně nekonečně mnoho možností), ...
- avšak (!)
    - má-li některá z bází $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ nekonečný počet prvků, mají nekonečný počet prvků všechny báze na $\mathcal{V}$,
    - má-li některá z bází $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ konečný počet prvků, mají konečný počet prvků všechny báze na $\mathcal{V}$, přičemž počet jejich prvků je pro všechny báze stejný.

Poznámka:

LVP se takto dělí přirozeně na dvě skupiny, ty s nekonečnými bázemi a ty s bázemi konečnými. V tomto kurzu se budeme zabývat výhradně druhou skupinou.

Báze na LVP

Příklad:

Zjistěte, zda je soustava vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,1)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (1,3,2)$ bází na $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

- lineární nezávislost vektorů
  - viz obrazovka 13 (14)
- generátory
  - $\forall \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\colon\ \boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3$
  - $\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= b_1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= b_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= b_3 \end{aligned}$
  - $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 3 & b_2 \\ 3 & 1 & 2 & b_3 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \tilde{b}_1 \\ 0 & -4 & 1 & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & -3 & \tilde{b}_3 \end{array}\right)$, kde $\tilde{b}_1 = b_1$, $\tilde{b}_2 = b_2 - 2b_1$, $\tilde{b}_3 = b_3 - 2b_2 + b_1$
- jednodušší alternativa výpočtu „generátory“: *test počtem prvků* (viz dále)
  - počet prvků množiny vektorů (3) je roven dimenzi $\mathbb{R}^3$ (3)

Dimenze LVP

Definice:

- Počet prvků báze prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme jeho *dimenzí* a značíme $\dim \mathcal{V}$.
- Triviálnímu prostoru přiřazujeme dimenzi nulovou, $\dim\{\boldsymbol{o}\} = 0$.
- Je-li $\dim \mathcal{V} < +\infty$, nazýváme prostor $\mathcal{V}$ *konečněrozměrným* (*konečnědimenzionálním*).
- V opačném případě jej nazveme *nekonečněrozměrným* (*nekonečnědimenzionálním*).

Poznámka:

V tomto kurzu se budeme zabývat jen konečněrozměrnými prostory, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$. Pak můžeme psát $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

V takovém případě je každá lineárně nezávislá soustava vektorů o n prvcích bází.

Standardní (kanonické) báze

Poznámka:

Speciální bází na aritmetickém LVP ($\mathbb{R}^n$,$\mathbb{C}^n$) je soustava vektorů:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\dots,0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,\dots,0),\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n = (0,0,\dots,1).$$

Tuto bázi nazýváme *standardní* či *kanonickou*.

Platí tedy $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Poznámka:

Pod *standardní (kanonickou) bází na prostoru polynomů* maximálního stupně n ($\mathcal{P}_n$) rozumíme množinu polynomů (vektorů z $\mathcal{P}_n$):

$$p_0 = 1,\ p_1(x) = x\ ,\ p_2(x) = x^2,\ \dots,\ p_n(x) = x^n.$$

Všimněme si, že báze $p_0, p_1, \dots, p_n$ má $n+1$ prvků, tedy $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Cvičení:

Uměli byste dokázat, že soustavy vektorů z předchozích dvou poznámek jsou skutečně bázemi?

5. Souřadnice vektorů

Souřadnice vektoru (v zadané bázi)

Tvrzení:

Nechť $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na prostoru $\mathcal{V}$. Pak pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ existuje právě jedna uspořádaná *n*-tice čísel $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ splňující

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{a}_k = \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \xi_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{a}_n.$$

Důkaz:

- $\mathcal{B}$ generuje $\mathcal{V}$, každý vektor z $\mathcal{V}$ se tedy dá zapsat jako nějaká lineární kombinace prvků $\mathcal{B}$
- pokud by takové lineární kombinace existovaly (aspoň) dvě, $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \boldsymbol{a}_k$, muselo by platit $\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k) \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$ (proč?), a tedy i $\xi_k - \eta_k = 0$ (proč?)

Definice:

Čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ z předchozího tvrzení nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi $\mathcal{B}$.

Poznámka:

Souřadnice vektoru jsou v zadané bázi určeny jednoznačně, ale ...

Souřadnice vektoru (v zadané bázi)

Příklad:

Určete souřadnice vektoru $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ v bázi $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,3,2)$.

Řešení:

- $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{a}_1 + \xi_2\boldsymbol{a}_2 + \xi_3\boldsymbol{a}_3$
  - $\xi_1(1,2,3) + \xi_2(3,2,1) + \xi_3(1,3,2) = (1,1,1)$
  - $(\xi_1, 2\xi_1, 3\xi_1) + (3\xi_2, 2\xi_2, \xi_2) + (\xi_3, 3\xi_3, 2\xi_3) = (1,1,1)$
  - $(x_1 + 3x + x, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3) = (1,1,1)$
- $$\begin{aligned} \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 &= 1 \\ 2\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 &= 1 \\ 3\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 1 \end{aligned}$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ \underbrace{3}_{\boldsymbol{a}_1} & \underbrace{1}_{\boldsymbol{a}_2} & \underbrace{2}_{\boldsymbol{a}_3} & \underbrace{1}_{\boldsymbol{x}} \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \xi_3 = 0,\ \xi_2 = \frac{1}{4},\ \xi_1 = \frac{1}{4}.$$

Transformace souřadnic vektoru

Poznámka:

Souřadnice vektoru jsou v zadané bázi určeny jednoznačně, ale ... liší se bázi od báze.

Tvrzení:

Nechť $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ a $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n\}$ jsou dvě báze na prostoru $\mathcal{V}$ a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ vzhledem k nim.
Označme dále $\mathbf{T}$ čtvercovou matici, jejíž elementy splňují $\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ji} \boldsymbol{a}'_j$.

Pak $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{T}.\boldsymbol{\xi}$, kde $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{\xi}' \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$.

Důkaz:

- $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ji} \boldsymbol{a}'_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} T_{ji} \xi_i\right) \boldsymbol{a}'_j = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j \boldsymbol{a}'_j$
- $\xi'_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji} \xi_i$

Poznámka:

- Sloupce matice $\mathbf{T}$ obsahují souřadnice vektorů báze $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n$.
- Matice $\mathbf{T}$ je regulární.

Transformace souřadnic vektoru

Tvrzení:

Nechť $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ a $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n\}$ jsou dvě báze na prostoru $\mathcal{V}$ a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ vzhledem k nim.

Označme dále $\mathbf{T}'$ čtvercovou matici, jejíž elementy splňují $\boldsymbol{a}'_i = \sum_{j=1}^{n} T'_{ji} \boldsymbol{a}_j$.

Pak $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}'.\boldsymbol{\xi}'$, kde (stejně jako na předchozí obrazovce) $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{\xi}' \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$.

Důkaz:

- $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \boldsymbol{a}'_i = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \left(\sum_{j=1}^{n} T'_{ji} \boldsymbol{a}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} T'_{ji} \xi'_i \right) \boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \boldsymbol{a}_j$
- $\xi_j = \sum_{i=1}^{n} T'_{ji} \xi'_i$

Poznámka:

- Sloupce matice $\mathbf{T}'$obsahují souřadnice vektorů báze $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_n$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$.
- Rovněž matice $\mathbf{T}'$ je regulární.
- Platí $\mathbf{T}' = \mathbf{T}^{-1}$, a tedy i $\mathbf{T} = \mathbf{T}'^{-1}$.

6. Podprostory LVP

Podprostor

Definice:

Nechť $\mathcal{V}$ je LVP a $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$. Pak $\mathcal{P}$ nazveme *podprostorem* $\mathcal{V}$, pokud:

- $\mathcal{P} \neq \emptyset$,
- $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{P}: \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathcal{P}$,
- $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}): \alpha \boldsymbol{a} \in \mathcal{P}$.

Tvrzení:

- $\mathcal{V}$ a $\{\boldsymbol{o}\}$ jsou podprostory $\mathcal{V}$.
- Nechť $\mathcal{P}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{V}$, pak platí:
  - $\boldsymbol{o} \in \mathcal{P}$,
  - $\mathcal{P}$ je LVP,
  - $\dim \mathcal{P} \leq \dim \mathcal{V}$.
- Nechť $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ je podprostor $\mathcal{V}$.* Speciálně $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ je podprostorem $\mathcal{V}$.

* Je to nejmenší podprostor $\mathcal{V}$, který obsahuje celou množinu $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \subset \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{P}$).

Podprostor

Příklad:

Dokažte, že $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

- $\mathcal{R} \neq \emptyset$ (test pomocí $\boldsymbol{o}$)
  - $(0,0,0) \in \mathcal{R}$ (protože $0 + 0 + 0 = 0$)
- $(x, y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha(x, y, z) \in \mathcal{R}$
  - $(x, y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow x + y + z = 0$
  - $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
  - $\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = \alpha 0 = 0$
- $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R} \wedge (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{R}$
  - $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$
  - $(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0$
  - $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
  - $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$

Podprostor

Příklad:

Dokažte, že $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z - 1 = 0\}$ není podprostor $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

- test pomocí $\boldsymbol{o}$
  - $(0,0,0) \notin \mathcal{R}$ (protože $0 + 0 + 0 - 1 = -1 \neq 0$)
- další testy
  - není třeba provádět

Podprostor

Příklad:

Dokažte, že $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 0\}$ není podprostor $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

- $\mathcal{R} \neq \emptyset$ (test pomocí $\boldsymbol{o}$)
    - $(0,0,0) \in \mathcal{R}$ (protože $0^2 + 0 + 0 = 0$)
- $(x, y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha(x, y, z) \in \mathcal{R}$
    - $(x, y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow x^2 + y + z = 0$
    - $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
    - $(\alpha x)^2 + \alpha y + \alpha z = \alpha^2 x^2 + \alpha y + \alpha z = \alpha(\alpha x^2 + y + z) = \alpha[(\alpha - 1)x^2 + x^2 + y + z] =$
      $= \alpha[(\alpha - 1)x^2 + 0] = \alpha(\alpha - 1)x^2 \neq 0$
- $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R} \wedge (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{R}$
    - není třeba prověřovat

Součet podprostorů

Definice:

Nechť $\mathcal{V}$ je LVP a $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{V}$ jeho podprostory. Pak pod jejich *součtem* rozumíme $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ splňující

- $\mathcal{S} = \mathcal{L}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$

a píšeme

- $\mathcal{S} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

Tvrzení:

- $\mathcal{S}$ je podprostor $\mathcal{V}$,
- je to nejmenší podprostor $\mathcal{V}$, který obsahuje $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$,
- $\forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}\ \exists \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ a $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ (vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ nejsou obecně určeny jednoznačně),
- $\dim \mathcal{S} \leq \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q}$.

Příklad:

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{R} + \mathcal{I}$, kde $\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} = (x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ a $\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{y} = (0, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Direktní (přímý) součet podprostorů

Definice:

Nechť $\mathcal{V}$ je LVP a $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{V}$ jsou jeho (netriviální) podprostory splňující $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\boldsymbol{o}\}$. Pak jejich součet nazveme *direktním (přímým) součtem* a píšeme

- $\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$.

Tvrzení:

- $\forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}\ \exists!\, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{Q} : \boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ (vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ jsou tedy v tomto případě určeny jednoznačně),
- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q}$.

Tvrzení:

Nechť $\mathcal{P}$ je (netriviální) podprostor konečnědimenzionálního LVP $\mathcal{V}$, $\mathcal{P} \neq \mathcal{V}$. Pak existuje podprostor $\mathcal{P}' \subset \mathcal{V}$ takový, že $\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}'$. Tento podprostor ale není určen jednoznačně.

Příklad:

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{I}$, kde $\mathcal{R}$ a $\mathcal{I}$ jsou množiny z předcházejícího příkladu.

Ve smyslu předcházejícího tvrzení je $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ a $\mathcal{P}' = \mathcal{I}$. (Platí ale např. také $\mathbb{R}^2 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{K}$, kde $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{z} = (z, z); z \in \mathbb{R}\}$.)

Konec lekce 3.