Maticový počet

Lineární algebra

lekce 2

Osnova

1. Matice
2. Základní maticové operace
3. Maticová reprezentace (elementárních) ekvivalentních úprav
4. Inverzní matice

1. Matice

Opakování lekce 1

Definice:

- *matice řádu* $m \times n$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$
- *sloupcový, řádkový vektor*: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (c_1\ c_2\ \dots c_n)$,
- *čtvercová matice*: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, tedy $m = n$

Rovnost matic

Definice:

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ & & \dots & \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$ jsou dvě matice

řádu $m \times n$ a $p \times q$, pak řekneme, že jsou si rovny (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), pokud

- $m = p \ \wedge \ n = q$ (mají stejný řád – stejnou velikost i tvar),
- $\forall i = 1, \dots, m \ \forall j = 1, \dots, n: a_{ij} = b_{ij}$ (odpovídající si prvky se rovnají).

Poznámka:

- Rovnost matic definujeme pomocí známé relace *rovnost čísel*. Takto budeme postupovat i v dalších případech (viz kapitola 2).
- Pozor na rozdílnost „=“ v $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ a $a_{ij} = b_{ij}$. Podobné to bude i v případě maticových operací (kapitola 2).

Jednotková a nulová matice

Definice:

- *jednotková matice* $(n \times n)$:
$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

- *nulová matice* (obecně $m \times n$):
$$\mathbf{O} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Poznámka:

V některých učebnicích (atd.) se jednotková matice označuje symbolem $\mathbf{E}$. Občas se připojuje formou dolního indexu informace o jejím řádu ($\mathbf{I}_n, \mathbf{E}_n$).

Transponovaná matice

Definice:

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Pozorování:

- matice transponovaná k matici řádu $m \times n$ je matice řádu $n \times m$,
- $a_{ij}^T = a_{ji}$,
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{b}^T = (b_1\ b_2\ \dots b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1\ c_2\ \dots c_n) \rightarrow \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$,
- čtvercová matice → transpozice = překlopení kolem diagonály, diagonální prvky se tedy při transpozici nemění,
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Transponovaná matice

Definice:

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix}$

V dalším budeme malými tučnými písmeny ($\mathbf{b}$) označovat zpravidla *sloupcové vektory*.

Řádkové vektory pak obvykle zapíšeme pomocí transpozice vektoru sloupcového ($\mathbf{c}^T$).

Pozorování:

- matice transponovaná k matici řádu $m \times n$ je matice řád
- $a_{ij}^T = a_{ji}$,
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{b}^T = (b_1 \ b_2 \ \dots b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots c_n) \rightarrow \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$,
- čtvercová matice → transpozice = překlopení kolem diagonály, diagonální prvky se tedy při transpozici nemění,
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Symetrické a antisymetrické matice

Definice:

Reálnou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nazveme *symetrickou* / *antisymetrickou*, splňuje-li $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ / $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Pozorování:

- pro symetrické / antisymetrické matice platí $a_{ij} = a_{ji}$ / $a_{ij} = -a_{ji}$,
- jednotkové a čtvercové nulové matice jsou maticemi symetrickými.

Poznámka:

V případě komplexních matic se pojem symetrická / antisymetrická matice zobecňuje na pojem *matice hermitovská* ($\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$) / antihermitovská ($\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$).

2. Základní maticové operace

Sčítání matic

Definice:

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ jsou dvě matice

(stejného) řádu $m \times n$, pak

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sčítání matic

Tvrzení:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
- $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

Poznámka:

Matice $\mathbf{O}$ řádu $m \times n$ je jediná matice, která splňuje třetí tvrzení pro všechny matice stejného řádu.

Důkaz: $\mathbf{O} + \mathbf{O}' \begin{cases} = \mathbf{O} \\ = \mathbf{O}' \end{cases} \Rightarrow \mathbf{O} = \mathbf{O}'$

Násobení matic číslem

Definice:

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), pak $\beta\mathbf{A} = \mathbf{A}\beta \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \dots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \dots & \beta a_{2n} \\ & & \dots & \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \dots & \beta a_{mn} \end{pmatrix}$.

Tvrzení:

- $\beta(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \beta\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$,
- $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$,
- $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$,
- $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $(\beta\mathbf{A})^T = \beta\mathbf{A}^T$.

Násobení matic

Definice:

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix}$ jsou matice

řádů $p \times n$ a $n \times q$, pak jejich součin je dán maticí řádu $p \times q$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ & & \dots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix},$$

kde $c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Násobení matic

Pozorování:

- $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij}$ je aritmetickým skalárním součinem řádku i matice $\mathbf{A}$ a sloupce j matice $\mathbf{B}$, např.
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ & & \dots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix}$$

Tvrzení: (pokud má levá strana smysl)

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$,
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,
- $\alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B})$,
- $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$ (speciálně to platí pro čtvercové matice $\mathbf{A}$),
- $\mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}'$ (matice $\mathbf{A}$ je řádu $p \times n$, pak $\mathbf{O}$ je řádu $m \times p$ a $\mathbf{O}'$ je řádu $m \times n$),
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$,
- ale ...

Násobení matic

Tvrzení:

- obecně neplatí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$!!!
  - $p \neq q \rightarrow$ pravá strana nemá smysl,
  - $p = q$ (např. čtvercové matice stejných řádů) $\rightarrow$ pravá strana má smysl, ale přesto může být $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ale} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice:

Výraz $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice) nazýváme *komutátorem matic* a matice splňující $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{O}$ *maticemi komutujícími*.

3. Maticová reprezentace (elementárních) ekvivalentních úprav

Matice (elementárních) řádkových úprav

Tvrzení:

Elementární řádkové Gaussovy úpravy je možno reprezentovat násobením rozšířené matice soustavy čtvercovými maticemi řádu $m \times m$ (m je počet řešených rovnic = počet řádků rozšířené matice soustavy) zleva, $\mathbf{A} \to \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}$,

- násobení řádku i (nenulovým) číslem α: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}(1_{ii} \to \alpha)$,
- přičtení řádku j k řádku i: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}(0_{ij} \to 1)$,
- přičtení β-násobku řádku j k α-násobku řádku i: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}(1_{ii} \to \alpha, 0_{ij} \to \beta)$,*
- prohození řádků i a j: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}(s_i \leftrightarrow s_j)$.**

Pozorování:

Elementární matice $\mathbf{Q}$ jsou jen „zlehka“ modifikovanými maticemi jednotkovými.

* V Gaussově eliminační metodě je $j < i$, v případě zpětných Jordanových eliminací je $j > i$.

** s_i je i-tý sloupec matice $\mathbf{I}$.

Matice Gaussovy eliminace (jako celku)

Tvrzení:

Gaussovu eliminaci jako celek je možno reprezentovat násobením rozšířené matice soustavy čtvercovou maticí řádu $m \times m$ (m je počet řešených rovnic = počet řádků rozšířené matice soustavy) zleva, $\mathbf{A} \to \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$, které matici soustavy převede do (řádkově odstupňovaného) horního trojúhelníkového tvaru.

Důkaz:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\textbf{Gauss}} \mathbf{Q}_N \cdot \big(\mathbf{Q}_{N-1} \cdot \; \dots \; \cdot (\mathbf{Q}_2 \cdot (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A}) \dots)\big) = \underbrace{(\mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{Q}_{N-1} \cdot \; \dots \; \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1)}_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$$

Matice Gaussovy-Jordanovy eliminace

Poznámka:

V některých případech můžeme Gaussovy eliminace doplnit zpětnými Jordanovými eliminacemi.

Ty se opět dají reprezentovat násobením (gaussovsky eliminované) rozšířené matice soustavy (zleva) maticemi odpovídajícími maticím elementárních řádkových úprav:

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{Jordan}} \mathbf{Q}_M \cdot \left(\mathbf{Q}_{M-1} \cdot \ \dots \ \cdot \left(\mathbf{Q}_{N+2} \cdot \left(\mathbf{Q}_{N+1} \cdot (\mathbf{G}\cdot\mathbf{A})\right) \dots \right)\right) = \cdots .$$

Zpětnou Jordanovu (a tedy i celkovou Gaussovu-Jordanovu) eliminaci lze proto rovněž reprezentovat násobením rozšířené matice soustavy jistou čtvercovou maticí (zleva):

$$\dots = \underbrace{(\mathbf{Q}_M \cdot \mathbf{Q}_{M-1} \cdot \ \dots \ \cdot \mathbf{Q}_{N+2} \cdot \mathbf{Q}_{N+1})}_{\mathbf{J}} \cdot (\mathbf{G}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{J}\cdot(\mathbf{G}\cdot\mathbf{A}) = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{G})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{A}\,.$$

4. Inverzní matice

Regulární matice, inverzní matice

Definice:

Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ je *regulární* (má matici inverzní), pokud existuje matice $\mathbf{B}$ splňující

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Matici $\mathbf{B}$ pak nazveme *inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$ a budeme ji označovat symbolem $\mathbf{A}^{-1}$.

Poznámka:

Platí tedy $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Pozor (zatím) na pořadí násobení.

Regulární matice, inverzní matice

Tvrzení: ($\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou regulární matice)

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$

Důkaz:

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \xrightarrow{\cdot \mathbf{A}} \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})}_{\mathbf{I}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (*)$
- $\mathbf{I} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1},$
- $(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}\,,$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{T} \cdot \mathbf{A}^{T} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})^{T} = \mathbf{I}^{T} = \mathbf{I}\,.$

(*) Nejdříve bychom ale měli dokázat, že matice $\mathbf{A}^{-1}$ je regulární, tedy že matice $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ vůbec existuje. K tomu bychom ale potřebovali přece jen poněkud hlubší znalosti o lineárních zobrazeních lineárních vektorových prostorů.

Vlastnosti inverzní matice

Tvrzení:

Má-li matice $\mathbf{A}$ matici inverzní, je tato určena jednoznačně.

Důkaz:

- nechť: $\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_2^{-1} = \mathbf{I})$,
- pak: $\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_2^{-1} = \begin{cases} \left(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{A}_2^{-1} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}_2^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_2^{-1}) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}_1^{-1} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}$.

Vlastnosti inverzní matice

Poznámka:

- Násobení inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ je maticovým analogem dělení (reálných/komplexních) čísel:
  $x : y = xy^{-1} \rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- Všimněme si, že ne každou maticí lze „dělit“ (stejně jako nelze dělit každým číslem),
  „dělit“ lze jen maticemi regulárními (podobně jako lze dělit jen čísly nenulovými).
- V případě matic je rozdíl mezi „dělením“ zleva a zprava (tedy násobením inverzní maticí zleva a zprava): $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Výpočet inverzní matice (Gauss-Jordan)

Pozorování:

- Podaří-li se nám zadanou (čtvercovou) matici $\mathbf{A}$ upravit Gaussovou-Jordanovou eliminací na matici jednotkovou, existuje matice $\mathbf{\Gamma}$ stejného řádu jako $\mathbf{A}$ taková, že

  $$\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

- Pak je ale nutně matice $\mathbf{A}$ regulární a matice $\mathbf{\Gamma}$ je její matice inverzní, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1}$.

Tvrzení:

Matici $\mathbf{\Gamma}$ získáme tak, že tytéž úpravy aplikujeme na matici jednotkovou (řádu stejného jako matice $\mathbf{A}$).

Důkaz: $\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{\Gamma}$

Poznámka:

Pokud (čtvercovou) matici pomocí G-J eliminací na jednotkovou matici upravit nelze, není regulární, a tedy nemá matici inverzní.

(G-J eliminace tedy stačí samy o sobě k rozhodnutí, zda je zadaná matice regulární, žádný další test regularity před samotným výpočtem provádět nemusíme.)

Výpočet inverzní matice (Gauss-Jordan)

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2:=r2-r1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=r3+r2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=-r3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2:=-(r2+r3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1:=r1-r2-r3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ tedy matice $\mathbf{A}$ je regulární

$$\mathbf{A}^{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2:=r2-r1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=r3+r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=-r3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2:=-(r2+r3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1:=r1-r2-r3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

Zkouška: ($\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$) – domácí cvičení.

Výpočet inverzní matice (Gauss-Jordan)

Poznámka:

Přehledné řešení můžeme získat současnými úpravami zadané matice $\mathbf{A}$ a matice jednotkové:

$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \to \cdots \to (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

V našem případě:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

Výpočet inverzní matice (Gauss-Jordan)

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r2:=r2-r1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r3:=r3+r2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & {\color{red}0} \end{pmatrix},$$

na pozici „33“ jedničku už „nevyrobíme“, matice $\mathbf{A}$ tedy není regulární a nemá matici inverzní.

Konec lekce 2.