Spektrální analýza (čtvercových) matic

Lineární algebra

lekce 11

Osnova

1. Vlastní čísla a vlastní vektory, spektrum
2. Vlastní čísla
3. Vlastní vektory
4. Symetrické matice

(5. Přibližná lokalizace vlastních čísel)

1. Vlastní čísla a vlastní vektory, spektrum

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n \times n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující:*

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$,

pak λ nazveme *vlastním číslem* matice $\mathbf{A}$ a $\boldsymbol{u}$ $(\mathbf{u})$ *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ k tomuto vlastnímu číslu příslušejícím.
Množinu všech vlastních čísel matice pak nazýváme jejím *spektrem* a obvykle značíme $\sigma(\mathbf{A})$.

Poznámka:

- V této lekci by mohla být matice $\mathbf{A}$ obecně komplexní, my ale budeme i nadále uvažovat jen matice reálné.
- Reálné matice nemusejí mít obecně ani jedno reálné vlastní číslo, proto předpokládáme $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Vlastní vektor příslušející ke komplexnímu vlastnímu číslu je obecně komplexní, proto $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, tedy $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $u_k \in \mathbb{C}$.
- Matice řádu $n \times n$ má v jistém smyslu (viz dále) n (obecně komplexních) vlastních čísel, ne však nutně navzájem různých.
- Je-li λ vlastní číslo <u>reálné</u> čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\boldsymbol{u}$ k němu příslušející vlastní vektor, jsou $\bar{\lambda}$ a $\bar{\boldsymbol{u}} \overset{\text{def}}{=} (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ rovněž vlastní číslo a jemu příslušející vlastní vektor stejné matice [*Důkaz:* $\overline{\mathbf{A}.\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{A}}.\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}.\bar{\mathbf{u}}$, $\overline{\lambda\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}.\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}$].
- Je-li $\boldsymbol{u}$ vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu λ, je jeho libovolný nenulový (komplexní) násobek rovněž vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím stejnému vlastnímu číslu λ. [*Důkaz:* $\mathbf{A}.(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = (\alpha\lambda)\mathbf{u} = (\lambda\alpha)\mathbf{u} = \lambda(\alpha\mathbf{u})$]

* Nezapomeňme: $\boldsymbol{u}$ je uspořádaná n-tice čísel, $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}$ je sloupcový vektor, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}$, tečka na patě řádku označuje maticové násobení.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Tvrzení:

Podobné matice* mají stejné spektrum, kongruentní matice** mají stejné spektrum v případě ortogonální kongruence***.

Důkaz:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\underbrace{(\mathbf{Q}.\mathbf{Q}^{-1})}_{\mathbf{I}}.\mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1}.(\lambda\mathbf{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{Q})}_{\mathbf{A}'}.\underbrace{\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{u}}_{\mathbf{u}'} = \lambda\,\underbrace{\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{u}}_{\mathbf{u}'} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}'.\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}',$
- viz ***.

Tvrzení:

Nechť vlastní vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ matice $\mathbf{A}$ (řádu $n \times n$) tvoří bázi na $\mathbb{R}^n$, pak matice $\mathbf{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}$, kde sloupce matice $\mathbf{Q}$ tvoří vektory $\mathbf{u}_i$ ($\mathbf{q}_i^S = \mathbf{u}_i$), je diagonální a na diagonále má vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Důkaz: $\mathbf{A}.\mathbf{Q} = \left(\lambda_1\mathbf{q}_1^S, \lambda_2\mathbf{q}_2^S, \ldots, \lambda_n\mathbf{q}_n^S\right), \quad \mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{q}_i^S = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \underbrace{1}_{i} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$*\ \mathbf{A}' = \mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{Q}\ ;\ \ **\ \mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T.\mathbf{A}.\mathbf{Q}\ ;\ \ ***\ \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Poznámka:

- O podobnostní transformaci z předchozího tvrzení říkáme, že matici $\mathbf{A}$ diagonalizuje (ne vždy je to ale možné).
- Obvykle tuto transformaci nazýváme *spektrálním rozkladem* matice $\mathbf{A}$ (ten ale ne vždy existuje).
- V případě, že vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi na $\mathbb{R}^n$, diagonalizuje matici $\mathbf{A}$ kongruentní transformace $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T.\mathbf{A}.\mathbf{Q}$, kde sloupce matice $\mathbf{Q}$ jsou jednotlivé (ortonormální) vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.

Příklady vlastních čísel a vlastních vektorů

Tvrzení:

- Kterýkoliv nenulový vektor z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) je vlastním vektorem jednotkové matice ($\mathbf{I}$) příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda = 1$. [*Důkaz:* $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$: $\mathbf{I}.\mathbf{u} = \mathbf{u} = 1\mathbf{u}$]
- Vlastními čísly diagonální matice jsou čísla na její diagonále. Vlastní vektor příslušející číslu na pozici ii je pak $\boldsymbol{u}_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)$. [*Důkaz:* $\mathbf{A}.\mathbf{u}_i = a_{ii}\mathbf{u}_i$]
- Nechť $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ je nulový prostor (čtvercové) matice $\mathbf{A}$, pak každý nenulový vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda = 0$. [*Důkaz:* $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$: $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \mathbf{o} = 0\mathbf{u}$]
- Nechť $\mathbf{P}$ je ortogonální projektor na podprostor $\mathcal{P}$, pak každý vektor z $\mathcal{P}$ je jeho vlastním vektorem příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda = 1$ a každý vektor z $\mathcal{P}_\perp$ je jeho vlastním vektorem příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda = 0$.

  [*Důkaz:* $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{P}: \boldsymbol{u} = \underbrace{\boldsymbol{u}}_{\in\mathcal{P}} + \underbrace{\boldsymbol{o}}_{\in\mathcal{P}_\perp} \Rightarrow \mathbf{P}.\mathbf{u} = \mathbf{u} = 1\mathbf{u}$; $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{P}_\perp: \boldsymbol{u} = \underbrace{\boldsymbol{o}}_{\in\mathcal{P}} + \underbrace{\boldsymbol{v}}_{\in\mathcal{P}_\perp} \Rightarrow \mathbf{P}.\mathbf{v} = \mathbf{o} = 0\mathbf{v}$]

2. Vlastní čísla

Výpočet vlastních čísel

Pozorování:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).\mathbf{u} = \mathbf{o}$ (homogenní soustava n LAR o n neznámých),
- netriviální (nenulové) řešení, právě když je matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ singulární,
- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Poznámka:

- Rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ se obvykle nazývá *charakteristickou* či *sekulární rovnicí* (matice $\mathbf{A}$).
- Jedná se o algebraickou rovnici stupně n: $(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$.
- Jako taková má v $\mathbb{C}$ celkem n (obecně ne navzájem různých*) řešení (kořenů polynomu na levé straně).
- $(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = \begin{cases} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\ (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \end{cases}$:
  - $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = \det(\mathbf{A})$,
  - $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$.**

* násobné kořeny ** $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (*stopa matice*, *trace*), někdy též značeno $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$ (*die Spur*)

Výpočet vlastních čísel

Příklad:

Určete všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0,$
  - $1 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1,$
  - $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 4. \end{cases}$

Test vlastních čísel

Příklad:

Zjistěte, zda jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$ vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $\det(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \cdots = 0$, λ_1 je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$,
- $\det(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = -2$, λ_2 není vlastní číslo matice $\mathbf{A}$.

3. Vlastní vektory

Výpočet vlastních vektorů

Poznámka:

- Pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{A}$ nalezneme jemu příslušející vlastní vektory řešením SLAR:
  - $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).\mathbf{u} = \mathbf{o}.$
- Hledáme tedy nulový prostor matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ (bez nulového vektoru), resp. bázi na něm (ale obecně v komplexním oboru).

Příklad:

Nalezněte všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_3 = 4$ (viz obrazovka 10).

Řešení:

- $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} u_1 = t \\ u_2 = t, t \in \mathbb{C} \\ u_3 = 0 \end{array} \to \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$ $[\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}((1,1,0))].$

Test vlastních vektorů

Příklad:

Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \cdots = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 2\lambda = 5 \\ 0\lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ 2\lambda = 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} \lambda = 5/2 \\ \lambda \text{ libovolné} \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$, soustava nemá řešení, $\mathbf{u}$ není vlastní vektor matice $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}.\mathbf{v} = \cdots = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ ... , soustava má řešení $\lambda = 2$, $\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$.

4. Symetrické matice

Vlastní čísla symetrických matic

Tvrzení:

Všechna vlastní čísla (reálných) symetrických matic jsou reálná.

Důkaz:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},\ \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A},\ \mathbf{A}^T = \mathbf{A},$
- $\overline{\mathbf{u}}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{u}}^T.(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\overline{\mathbf{u}}^T.\mathbf{u}) = \lambda\sum_{i=1}^n \bar{u}_i u_i = \lambda\sum_{i=1}^n |u_i|^2,$
- $\left(\overline{\overline{\mathbf{u}}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u})}\right)^T = \begin{cases} \overline{\lambda\sum_{i=1}^n |u_i|^2} = \bar{\lambda}\ \overline{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} = \bar{\lambda}\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \\ \left(\mathbf{u}^T.(\overline{\mathbf{A}}.\overline{\mathbf{u}})\right)^T = \left(\mathbf{u}^T.(\mathbf{A}.\overline{\mathbf{u}})\right)^T = \overline{\mathbf{u}}^T.(\mathbf{A}^T.\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{u}}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = \lambda(\overline{\mathbf{u}}^T.\mathbf{u}) = \lambda\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$

Poznámka:

Vlastní vektory (reálných) symetrických matic můžeme proto rovněž volit reálné.

Vlastní vektory symetrických matic

Tvrzení:

Vlastní vektory* (reálných) symetrických matic příslušející různým vlastním číslům jsou navzájem ortogonální.

Důkaz:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{A}.\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}, \quad \lambda \neq \mu, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, vše reálné,
- $\mathbf{v}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = \mathbf{v}^T.(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{v}^T.\mathbf{u}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \lambda(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$,
- $\left(\mathbf{v}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u})\right)^T = \left\{\begin{matrix}[\mathbf{v}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) \text{ je matice } 1\times 1] = \mathbf{v}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{u}) = \lambda(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) \\ \mathbf{u}^T.(\mathbf{A}^T.\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}^T.\mathbf{v}) = \mu\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \mu(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) \Rightarrow$
  $(\lambda-\mu)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0.$

Věta:

Nechť $\mathbf{A}$ je (reálná) symetrická matice řádu $n\times n$, pak na $\mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze z jejích vlastních vektorů.

* Zde se omezujeme jen na reálné vlastní vektory (viz předcházející obrazovka), protože pro ně máme definován skalární součin. Platí ale obecně, bylo by ale nutno použít zobecněnou definici skalárního součinu na komplexních aritmetických LVP.

Vlastní vektory symetrických matic

Důsledek:

Každou (reálnou) symetrickou matici řádu $n \times n$ je možno ortogonální kongruentní transformací $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}^T.\mathbf{A}.\mathbf{Q}$ převést na diagonální tvar s jejími vlastními čísly na diagonále.

Důkaz:

- viz obrazovky 5 a 6,
- jako sloupce matice $\mathbf{Q}$ volíme vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.

Důsledek:

Vzhledem k tomu, že kongruentní transformace zachovává definitnost (symetrické) matice (viz lekce 7, obrazovka 15), je možno definitnost takové matice určit pomocí jejích vlastních čísel:

- všechna kladná → pozitivně definitní,
- všechna záporná → negativně definitní,
- všechna nezáporná a aspoň jedno nulové → pozitivně semidefinitní,
- všechna nekladná a aspoň jedno nulové → negativně semidefinitní,
- aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné → indefinitní.

5. Přibližná lokalizace vlastních čísel (nepovinný dodatek)

Geršgorinova věta

Věta:

Nechť $\mathbf{A}$ je (obecně komplexní) matice řádu $n \times n$, pak platí:

- $\sigma(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$,

kde

- $\mathcal{K}_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right\}$ (kruh v komplexní rovině).

Důkaz:

- $\mathbf{A}.\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ (+), $\forall j \neq i: |u_i| \geq |u_j|$ (++),
- i-tý řádek rovnice (+): $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda u_i \Rightarrow (\lambda - a_{ii}) u_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} u_j$,
- $|(\lambda - a_{ii}) u_i| = |\lambda - a_{ii}||u_i| = \left|\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} u_j\right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||u_j| \leq |u_i| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow \lambda \in \mathcal{K}_i$,
- nevíme ovšem, pro kterou hodnotu *i* je podmínka (++) splněna, musíme tedy uvažovat všechny možnosti, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$.

Poznámka:

Pokud je matice $\mathbf{A}$ reálná a víme-li, že všechna její vlastní čísla jsou rovněž reálná (např. symetrická matice), můžeme ve výše uvedené větě psát:

- $\mathcal{K}_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}: |x - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right\}$ (interval na reálné ose).

Geršgorinova věta

Příklad:

Pomocí Geršgorinovy věty lokalizujte v $\mathbb{C}$ vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- $i = 1: \left\{\begin{matrix} a_{11} = 2 \\ |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |1| + |0| + |-1| = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mathcal{K}_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z - 2| \leq 2\},$
- $i = 2: \left\{\begin{matrix} a_{22} = 4 \\ |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |1| + |1| + |-1| = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mathcal{K}_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z - 4| \leq 3\},$
- $i = 2: \left\{\begin{matrix} a_{33} = 2 \\ |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |0| + |1| + |0| = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mathcal{K}_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z - 2| \leq 1\},$
- $i = 4: \left\{\begin{matrix} a_{44} = 3 \\ |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |-1| + |0| = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mathcal{K}_4 = \{z \in \mathbb{C}: |z - 3| \leq 1\},$
- $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$.

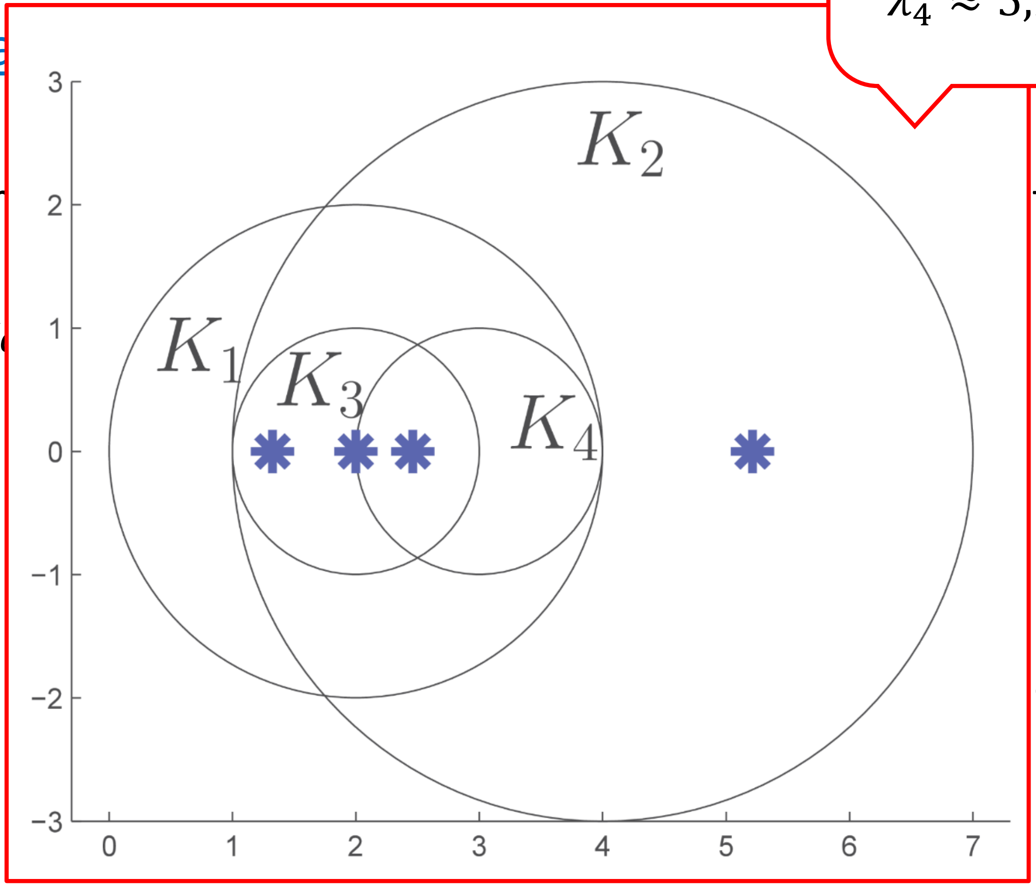
Geršgorinova věta

$\lambda_1 \approx 1{,}32$
$\lambda_2 \approx 2{,}00$
$\lambda_3 \approx 2{,}46$
$\lambda_4 \approx 5{,}21$

Příkla

Por … tice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řeš



→ $\mathcal{K}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 2\}$,

→ $\mathcal{K}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \le 3\}$,

→ $\mathcal{K}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 1\}$,

→ $\mathcal{K}_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \le 1\}$,

- $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$.

* Obrázek převzat z prezentace D. Lukáše.

Konec lekce 11.