Ortogonální projekce

Lineární algebra

lekce 10

Osnova

1. Ortogonální podprostory
2. Ortogonální projekce
3. Ortogonální projekce na aritmetických LVP

1. Ortogonální podprostory

Ortogonální množiny

Definice:

Nechť $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou dvě (neprázdné) podmnožiny LVP $\mathcal{U}$ a $(\ ,\ )$ je skalární součin na $\mathcal{U}$. Množiny $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ nazveme *ortogonálními* (případně řekneme, že $\mathcal{M}$ je *ortogonální* k $\mathcal{N}$ nebo že $\mathcal{N}$ je *ortogonální* k $\mathcal{M}$), právě když

- $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{M}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{N}: (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$

Poznámka:

Množiny $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ mohou být např. podprostory $\mathcal{U}$. Pak hovoříme o *ortogonálních podprostorech*.

Tvrzení:

- Nechť $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ jsou dva ortogonální podprostory $\mathcal{U}$, pak $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\boldsymbol{o}\}$.

  Důkaz:
  - $\boldsymbol{o} \in \mathcal{P}, \mathcal{Q}$, platí tedy $\{\boldsymbol{o}\} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Rightarrow (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, tedy žádný další vektor v $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ obsažen není.

- Podprostor $\mathcal{P}$ je ortogonální ke konečnědimenzionálnímu podprostoru $\mathcal{Q}$, právě když je ortogonální k libovolné množině jeho generátorů (např. bázi).

  Důkaz:
  - $\Rightarrow$: $\mathcal{P}$ je ortogonální ke všem vektorům z $\mathcal{Q}$, speciálně tedy k jeho libovolným generátorům,
  - $\Leftarrow$: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{u}, \sum_{j=1}^{q} \omega_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{q} \omega_j \underbrace{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j)}_{0} = 0.$

Ortogonální množiny

Příklad:

Nechť $\mathbf{A}$ je matice (obecného řádu $m \times n$), pak*

- $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$,
- příp. $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$

jsou (vzájemně) ortogonální podprostory $\mathbb{R}^n$ příp. $\mathbb{R}^m$.

Důkaz:

- $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{x} \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{R}} \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$,
- výše uvedené tvrzení aplikujeme na $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.

* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$,$\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ jsou řádkový, sloupcový a nulový prostor matice $\mathbf{A}$ (viz lekce 4, obrazovky 8, 11 a 14).

Ortogonální doplněk

Definice:

Nechť $\mathcal{P}$ je podprostor LVP $\mathcal{U}$ a $(\ ,\ )$ je skalární součin na $\mathcal{U}$. Pak pod *ortogonálním doplňkem* $\mathcal{P}$ v $\mathcal{U}$ rozumíme:

- $\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{q} \in \mathcal{U}: \forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}: (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0\}$.

Poznámka:

Ortogonální doplněk podprostoru $\mathcal{P}$ budeme označovat symbolem $\mathcal{P}_{\perp}$.

Tvrzení:

Ortogonální doplněk podprostoru $\mathcal{P}$ na LVP $\mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{U}$.

Důkaz: $(\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_{\perp}, \alpha \in \mathbb{R})$

- $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_{\perp}$,
- $(\boldsymbol{p}, \alpha\boldsymbol{q}) = \alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \alpha \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \alpha\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_{\perp}$.

Ortogonální doplněk

Věta: (o ortogonálním rozkladu)

Nechť $\mathcal{U}$ je konečnědimenzionální LVP, $(,)$ skalární součin na něm a $\mathcal{P}$ jeho podprostor. Pak

- $\mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}_\perp$,

neboli (viz lekce 3, obrazovka 33)

- $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}\colon \exists!\, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ a $\exists!\, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_\perp\colon \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$.

Důkaz:

- jednoznačnost
  - $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{q}' \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'(\in \mathcal{P}) = \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}\ (\in \mathcal{P}_\perp) \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{o} \end{cases}$,
- existence
  - $\dim \mathcal{P} < +\infty$ [proč?],
  - nechť $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ je ortonormální báze na $\mathcal{P}$ [umíme z obecné báze „vyrobit“ ortonormální?],
  - pak $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\colon \boldsymbol{q} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{a}_j \in \mathcal{P}_\perp$ [stačí zvolit $\alpha_k = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_k)$, pak bude $\forall k\colon \boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{a}_k$, a tedy i $\boldsymbol{q} \perp \mathcal{P}$]
  - $\boldsymbol{u} = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{a}_j\right)}_{\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{a}_j\right)}_{\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_\perp}$.

Ortogonální doplněk

Tvrzení:

Ortogonální doplněk ortogonálního doplňku podprostoru $\mathcal{P}$ je na konečnědimenzionálním prostoru $\mathcal{U}$ roven $\mathcal{P}$:

- $(\mathcal{P}_\perp)_\perp = \mathcal{P}$.

Důkaz:

- $\mathcal{P} \subset (\mathcal{P}_\perp)_\perp$:
  - $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \boldsymbol{p}$ je kolmý ke všem vektorům z $\mathcal{P}_\perp \Rightarrow \boldsymbol{p} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp$,
- $(\mathcal{P}_\perp)_\perp \subset \mathcal{P}$:
  - $\boldsymbol{r} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp \subset \mathcal{U}$,
  - $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, kde $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ a $\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_\perp$,
  - $\forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{P}_\perp : (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}) = \begin{Bmatrix} 0, \text{neboť } \boldsymbol{r} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp \\ \underbrace{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})}_{\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}, \boldsymbol{s} \in \mathcal{P}_\perp} + (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) = 0 + (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) \end{Bmatrix} \Rightarrow \forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{P}_\perp : (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) = 0 \overset{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{o} \Rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}.$

2. Ortogonální projekce

Ortogonální projekce

Definice:

Nechť $\mathcal{P}$ je podprostor konečnědimenzionálního LVP $\mathcal{U}$, $(\ ,\ )$ skalární součin na $\mathcal{U}$ a $\mathcal{P}_\perp$ ortogonální doplněk $\mathcal{P}$ v $\mathcal{U}$, pak pod *ortogonální projekcí* vektoru $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ na podprostor $\mathcal{P}$ rozumíme vektor $\boldsymbol{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ takový, že:

- $\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}_\perp$.

Poznámka:

- Podle věty o ortogonálním rozkladu (obrazovka 7) ortogonální projekce vektoru (na zadaný podprostor) existuje a je určena jednoznačně.
- Podle tvrzení z obrazovky 8 je $\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\mathcal{P}$ ortogonální projekcí vektoru $\boldsymbol{u}$ na $\mathcal{P}_\perp$.

Důkaz (druhé odrážky):

- $\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}_\perp$,
- $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\mathcal{P}) = \boldsymbol{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P} = (\mathcal{P}_\perp)_\perp$.

Ortogonální projektor

Definice:

Zobrazení $P: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ $(\dim \mathcal{U} = n)$ definované předpisem

- $P(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}}$,

kde $\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}}$ je ortogonální projekce $\boldsymbol{u}$ na $\mathcal{P}$, nazveme *ortogonálním projektorem* na $\mathcal{P}$.

Tvrzení:

Nechť P je ortogonální projektor, pak platí

- P je lineární zobrazení (transformace),
- $P^2 \stackrel{\text{def}}{=} P \circ P = P$.

Důkaz: $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in \mathbb{R})$

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp}) + (\boldsymbol{v}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}_\perp}) = \underbrace{(\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}})}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{(\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}_\perp})}_{\in \mathcal{P}_\perp} \xRightarrow{\text{jednoznačnost rozkladu}} P(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}} = P(\boldsymbol{u}) + P(\boldsymbol{v})$,
- $\alpha \boldsymbol{u} = \alpha(\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp}) = \alpha \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \alpha \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}_\perp} \Rightarrow P(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha P(\boldsymbol{u})$,
- $P^2(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (P \circ P)(\boldsymbol{u}) = P\big(P(\boldsymbol{u})\big) = P(\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}}) = [\boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{o}] = \boldsymbol{u}_{\mathcal{P}} \stackrel{\text{def}}{=} P(\boldsymbol{u}) \Rightarrow P^2(\boldsymbol{u}) = P(\boldsymbol{u})$,

Ortogonální projektor

Tvrzení:

Nechť P je ortogonální projektor, pak platí

- matice reprezentující P v (libovolné) ortonormální bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ na $\mathcal{U}$ je symetrická, tedy $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Důkaz:

- $P(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \boldsymbol{a}_k$ (lekce 5, obrazovka 20),
- $\left(\boldsymbol{a}_i, P(\boldsymbol{a}_j)\right) = \left(\boldsymbol{a}_i, \sum_{k=1}^n p_{kj} \boldsymbol{a}_k\right) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \left(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k\right) = [\text{ortonormální báze}] = p_{ij}$,
- $p_{ij} = \left(\boldsymbol{a}_i, P(\boldsymbol{a}_j)\right) = \left(P(\boldsymbol{a}_i) + P(\boldsymbol{a}_i)_\perp, P(\boldsymbol{a}_j)\right) = \left(P(\boldsymbol{a}_i), P(\boldsymbol{a}_j)\right) = \left(P(\boldsymbol{a}_i), \boldsymbol{a}_j - P(\boldsymbol{a}_j)_\perp\right) = \left(P(\boldsymbol{a}_i), \boldsymbol{a}_j\right) = \left(\boldsymbol{a}_j, P(\boldsymbol{a}_i)\right) = p_{ji}$.

3. Ortogonální projekce na aritmetických LVP

Projekce na 1D podprostor (přímku)

Příklad:

Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o})$, nalezněte ortogonální projekce vektoru $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a})$ a na $\mathcal{P}_\perp$.

Řešení:

- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}} = \alpha\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{a},$
- $(\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}},$
- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}} = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}, \ \ \boldsymbol{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}.$

Poznámka:

V maticovém zápisu máme:

- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathbf{a}^T.\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{a}^T.\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}.\mathbf{b} = \left(\frac{1}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a}.\mathbf{a}^T\right).\mathbf{b} \ \rightarrow \ \mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a}.\mathbf{a}^T,$ $\quad \left[(\mathbf{a}.\mathbf{a}^T)_{ij} = a_i a_j, \text{matice } n \times n\right]$
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}^T.\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a} = \cdots = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a}.\mathbf{a}^T\right).\mathbf{b} \ \rightarrow \ \mathbf{P}_\perp = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a}.\mathbf{a}^T.$

Projekce na *m*D podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nechť $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ je soustava (nenulových) vektorů z $\mathbb{R}^n$, nalezněte ortogonální projekci vektoru $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m)$ a na $\mathcal{P}_\perp$.

Řešení:

- $\boldsymbol{b}_\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \boldsymbol{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}_i, \quad \forall j = 1,2,\dots,m: (\boldsymbol{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j \cdot (\boldsymbol{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}_i) = 0$,
- nechť matice $\mathbf{A}$ (řádu $n \times m$) má ve sloupcích vektory $\boldsymbol{a}_i$: $\mathbf{a}_i^S = \mathbf{a}_i$, označme $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, pak výše uvedené podmínky ortogonality můžeme psát ve tvaru $\mathbf{A}^T.(\mathbf{b} - \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový sloupcový vektor (matice $m \times 1$), tedy
- $(\mathbf{A}^T.\mathbf{A}).\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T.\mathbf{b}$ (*normálová rovnice*).

Pozorování:

- $\mathbf{b}_\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha}$,
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha}$.

Projekce na *m*D podprostor (nadrovinu)

Poznámka:

- Je-li soustava vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ lineárně závislá, není řešení normálové rovnice určeno jednoznačně, vektor $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}}$ a $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}_\perp}$ ale ano*.
- Pokud soustava vektorů lineárně nezávislá je, má normálová rovnice řešení jediné**:
  - $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T.\mathbf{b} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \mathrm{A}.\alpha = \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T.\mathbf{b} & [\mathbf{P} = \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T] \\ \mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathrm{b} - \mathrm{A}.\alpha = \mathbf{b} - \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T.\mathbf{b} & [\mathbf{P}_\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T] \end{array}.$

Pozorování:

V případě projekce na 1D podprostor:

- $\mathbf{A}$ (matice $n \times 1$) $= \mathbf{a}$,
- $\mathbf{P} = \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T = \mathbf{a}.\underbrace{(\mathbf{a}^T.\mathbf{a})^{-1}}_{\substack{\text{matice } 1\times 1 \\ \text{číslo}}}.\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}^T.\mathbf{a}}\mathbf{a}.\mathbf{a}^T$ (srovnejte s obrazovkou 14).

* Různé lineární kombinace lineárně závislých vektorů mohou reprezentovat stejný vektor.

** Matice soustavy $\mathbf{A}^T.\mathbf{A}$ je regulární.

Projekce na *m*D podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\boldsymbol{b} = (1,2,3)$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$.

Řešení (pokud si pamatujeme vzorce):

1) matice

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T.\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2a) varianta „normálová rovnice“

- $(\mathbf{A}^T.\mathbf{A}).\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T.\mathbf{b} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$,
- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = \frac{3}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = (1,2,0)$ (interpretace!).

2b) varianta „projektor“

- $\mathbf{P} = \mathbf{A}.(\mathbf{A}^T.\mathbf{A})^{-1}.\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \mathbf{P}.\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Projekce na *m*D podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\boldsymbol{b} = (1,2,3)$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, kde $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,0)$.

Řešení (pokud si vzorce nepamatujeme):

- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2$: $\begin{cases}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_{\mathcal{P}}) \cdot \boldsymbol{a}_1 = (\boldsymbol{b} - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_1 = 0 \\ (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_{\mathcal{P}}) \cdot \boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{b} - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0\end{cases}$,
  - $(\boldsymbol{b} - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_1 = (1 - \alpha_1 \times 1 - \alpha_2 \times 1, 2 - \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1, 3 - \alpha_1 \times 0 - \alpha_2 \times 0) \cdot (1,1,0) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times 1 + (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \times 1 + 3 \times 0 = 3 - 2\alpha_1$,
  - $(\boldsymbol{b} - \alpha_1\boldsymbol{a}_1 - \alpha_2\boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_2 = (1 - \alpha_1 \times 1 - \alpha_2 \times 1, 2 - \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1, 3 - \alpha_1 \times 0 - \alpha_2 \times 0) \cdot (1,-1,0) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times 1 + (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \times (-1) + 3 \times 0 = -1 - 2\alpha_2$,
- $\begin{array}{r} 3 - 2\alpha_1 = 0 \\ -1 - 2\alpha_2 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$,
- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{P}} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2 = \frac{3}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = (1,2,0)$.

Konec lekce 10.