Soustavy lineárních algebraických rovnic

Lineární algebra

lekce 1

Osnova

1. Soustavy lineárních algebraických rovnic (SLAR) v $\mathbb{R}^n$
2. Maticová reprezentace SLAR
3. Metody řešení SLAR
4. SLAR v $\mathbb{C}^n$

Osnova

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{krát}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{R}\}$$

1. Soustavy lineárních algebraických rovnic (SLAR) v $\mathbb{R}^n$
2. Maticová reprezentace SLAR

$$\mathbb{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n-\text{krát}}$$

3. M
4. SLAR v $\mathbb{C}^n$

1. SLAR v $\mathbb{R}^n$

SLAR v $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Definice:

*soustava **m** lineárních algebraických rovnic o **n** neznámých (v $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$)*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots & & \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Poznámka:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: (známé) *koeficienty levé strany*
- $b_j \in \mathbb{R}$: (známé) *koeficienty pravé strany*
- $x_i \in \mathbb{R}$: *neznámé*

SLAR v $\mathbb{R}^n$

Příklady:

soustava 2 LAR o 2 neznámých

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

soustava 2 LAR o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

soustava 4 LAR o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 0 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}8x_3 &= 0 \\ 2x_2 + \sqrt{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SLAR v $\mathbb{R}^n$

Poznámka:

geometrická interpretace SLAR

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$ ... průsečík (průnik) dvou přímek v rovině

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$ ... průsečnice (průnik) dvou rovin v prostoru

...

geometrický náhled na řešitelnost SLAR

vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, ...

2. Maticová reprezentace SLAR

Koeficienty SLAR

Pozorování:

Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic je určeno koeficienty levé a pravé strany:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Tyto koeficienty můžeme uspořádat do tabulky:

$$
\begin{array}{llll|l}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Matice

Definice:

Tabulku (reálných) čísel $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}$ nazveme *maticí řádu* $m \times n$.

Speciální matici $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \equiv \mathbf{b}$ nazveme *sloupcovým vektorem*

a speciální matici $(c_1\ c_2\ \dots c_n) \equiv \mathbf{c}^T$ pak *vektorem řádkovým*.

Poznámka:

Sloupcový vektor je maticí řádu $m \times 1$, řádkový pak maticí řádu $1 \times n$. Řádkový vektor budeme též (později) psát jako $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ (*aritmetický vektor*).

Rozšířená matice soustavy

Definice:

Matici koeficientů levé strany SLAR (1.1),

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nazveme *maticí soustavy* (1.1), matici koeficientů pravé strany,

$$\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak (*sloupcovým*) *vektorem pravých stran*.

Rozšířená matice soustavy

Definice:

Matici

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

dále nazveme *rozšířenou maticí soustavy* (1.1).

Poznámka:

Rozšířená matice soustavy zadává SLAR jednoznačně.

Rozšířená matice soustavy

Příklad:

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -1 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

Násobení matic a vektorů

Definice: *násobení matice a sloupcového vektoru*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \leftrightarrow b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,, \quad i = 1,2,\dots,m$$

Poznámky:

- $b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$
  $b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$ atd.
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$
- aritmetický skalární součin

Násobení matic a vektorů

<u>Definice:</u> *násobení matice a sloupcového vektoru*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \leftrightarrow b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,, \quad i = 1,2,\dots,m$$

<u>Poznámky:</u>

- $b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$
  $b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$ atd.
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \dots & & & \\ a_{m1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

  $$\boxed{(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n}$$
- aritmetický skalární součin

Násobení matic a vektorů

Pozorování:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & \dots & + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

SLAR (1.1) je tedy možno zapsat v kompaktním tvaru

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Násobení matic a vektorů

Definice: *násobení řádkového vektoru a matice*

$$(y_1\ y_2 \dots y_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (c_1\ c_2 \dots c_n) \Leftrightarrow c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j, \quad i = 1,2, \dots, n$$

Poznámka:

- $$(y_1\ y_2 \dots y_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (c_1\ c_2 \dots c_n)$$

3. Metody řešení SLAR

Ekvivalentní úpravy SLAR

Opakování: *ekvivalentní (vratné) úpravy*

- ✓ násobení rovnice nenulovým číslem
- ✓ přičtení libovolné rovnice k vybrané rovnici
- ✓ přičtení lineární kombinace libovolného výběru rovnic k nenulovému násobku vybrané rovnice
- ✓ změna pořadí rovnic

Poznámka:

- ✓ středoškolská sčítací metoda
- ✓ cílem je
  - ✓ z vybrané rovnice odstranit některou/některé neznámou/neznámé
  - ✓ a postupně získat rovnici o jedné neznámé
  - ✓ dosazením snížit počet neznámých

Poznámka: *ekvivalentní úpravy v maticové reprezentaci*

- ✓ přičtení lineární kombinace libovolného výběru řádků rozšířené matice soustavy k nenulovému násobku řádku vybraného
- ✓ změna pořadí řádků rozšířené matice soustavy

Ekvivalentní úpravy SLAR

Definice: *lineární kombinace (řádkových) vektorů*

- ✓ $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}),\ i = 1,2,\dots,r$
- ✓ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r \equiv \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{is}\right)$
  $\alpha_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

Poznámka:

- ✓ řádky rozšířené matice soustavy je možno chápat jako řádkové vektory
- ✓ pojmu lineární kombinace řádků (rovnic) dává tedy předchozí definice smysl
- ✓ nezapomeňme, že rozšířená matice soustavy obsahuje koeficienty levé strany i vektor pravých stran
  ($s = n + 1$ a $a_{is} = b_i$)

Poznámka:

- ✓ k pojmu lineární kombinace vektorů se ještě vrátíme, až budeme probírat kapitolu *Lineární vektorové prostory*

Gaussova eliminační metoda

Princip:

- ✓ pomocí ekvivalentních úprav aplikovaných na rozšířenou matici soustavy převést matici soustavy do (řádkově odstupňovaného) horního trojúhelníkového tvaru (pravé strany se „vezou“)
- ✓ řádek k upravujeme pomocí řádků předchozích ($i < k$)
- ✓ řešení nalézt postupným dosazením zdola nahoru (*zpětné dosazení*)

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar čtvercové matice*

- ✓ matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m = n$
- ✓ prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- ✓ čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - ✓ jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - ✓ $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova … a

Využijeme s užitkem při (simultánním) řešení systému SLAR se stejnou maticí soustavy a odlišnými pravými stranami:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 & c_1 & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m & c_m & \end{array}\right)$$

Princip:

- ✓ pomocí e… rozšířenou matici soustavy převést matici soustavy d… dkově odstupňovaného) horního trojúhelníkového tvaru (pravé strany se „vezou“)
- ✓ řádek k upravujeme pomocí řádků předchozích ($i < k$)
- ✓ řešení nalézt postupným dosazením zdola nahoru (*zpětné dosazení*)

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar čtvercové matice*

- ✓ matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m = n$
- ✓ prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- ✓ čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - ✓ jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - ✓ $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova eliminační metoda

Ne vždy řešení existuje a ne vždy musí být určeno jednoznačně.

Rozhodnutí ale vyplyne vždy ze zpětného dosazení.

Podrobněji (a systematičtěji) se o tomto zmíníme znovu v kapitole *Řešitelnost SLAR*.

Princip:

- ✓ pomocí ekvivalentních úprav aplikovaných na ro
  matici soustavy do (řádkově odstupňovaného) h
  (pravé strany se „vezou“)
- ✓ řádek k upravujeme pomocí řádků předchozích ($i < k$)
- ✓ řešení nalézt postupným dosazením zdola nahoru (*zpětné dosazení*)

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar čtvercové matice*

- ✓ matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m = n$
- ✓ prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- ✓ čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - ✓ jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - ✓ $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova elimi

V řeči SLAR to znamená, že počet rovnic a počet neznámých se rovnají.

Vždy lze dosáhnout přidáním

- neznámých s nulovými koeficienty (#rovnic > #neznámých)

či

- rovnic s nulovými koeficienty a pravými stranami (#rovnic < #neznámých).

A nakonec na přídavky zapomenout (ekvivalentní úpravy je nezmění).

Princip:

- ✓ pomocí ekvivalentníc ... st matici soustavy do (ř (pravé strany se „vez
- ✓ řádek k upravujeme
- ✓ řešení nalézt postupny

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar čtvercové matice*

- ✓ matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m = n$
- ✓ prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- ✓ čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - ✓ jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - ✓ $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova eliminační metoda

Princip:

- ✓ pomocí ekvivalentních úprav aplikovaných na rozšířenou matici soustavy převést matici soustavy do (řádkově odstupňovaného) horního trojúhelníkového tvaru (pravé strany se „vezou“)
- ✓ řádek k upravujeme pomocí řádků předchozích ($i < k$)
- ✓ řešení nalézt postupným dosazením zdola nal ... *zení*)

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkov* ... *atice*

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

- ✓ matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m = n$
- ✓ prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- ✓ čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - ✓ jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - ✓ $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova eliminační metoda

Princip:

- pomocí ekvivalentních úprav aplikovaných na rozšířenou matici soustavy převést matici soustavy do (řádkově odstupňovaného) horního trojúhelníkového tvaru (pravé strany se „vezou“)
- řádek k upravujeme pomocí řádků předchozích ($i < k$)
- řešení nalézt postupným dosazením zd

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$ NE! (řádky prohodit)

Definice: (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúh*

- matice řádu $m \times n$ je *čtvercová*, pokud $m =$
- prvky a_{ii} tvoří tzv. *diagonálu* čtvercové matice
- čtvercová matice má (*řádkově odstupňovaný*) *horní trojúhelníkový tvar*, pokud
  - jsou všechny prvky pod její diagonálou nulové (prvky na diagonále a nad ní mohou být obecně nulové rovněž)
  - $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, kde j_1 označuje druhý index prvního nenulového prvku řádku 1 matice (a_{1j_1}) atd.

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= \quad 1 \\ x_1 - \quad x_2 + \ 2x_3 &= -1 \\ x_1 + \ 2x_2 - \quad x_3 &= \quad 0 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r3:=2r3+r2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1\\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

pivot

pivotovaný sloupec

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2-r1}
\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)
\xrightarrow{r3:=2r3+r2}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & -2\\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)
$$

Gaussova eliminační metoda

b) zpětné dosazení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 + & & x_2 + & & x_3 & = & 1 & \rightarrow & \mathrm{C} \\ & & -2x_2 + & & x_3 & = & -2 & \rightarrow & \mathrm{B} \\ & & & & -3x_3 & = & -4 & \rightarrow & \mathrm{A} \end{array}$$

A: $x_3 = \frac{4}{3}$

B: $x_2 = -\frac{1}{2}(-2 - x_3) = \cdots = \frac{5}{3}$

C: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = \cdots = -2$

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= \quad 1 \\ x_1 - \quad x_2 + \ 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Poznámka: Gaussova eliminace (jak to budeme dělat)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

b) zpětné dosazení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{rrrcrcl} x_1 + & x_2 + & x_3 & = & 1 & \rightarrow & \mathrm{C} \\ & -2x_2 + & x_3 & = & -2 & \rightarrow & \mathrm{B} \\ & & 0x_3 & = & 0 & \rightarrow & \mathrm{A} \end{array}$$

A: $x_3 = t \in \mathbb{R}$ (*parametr*)

B: $x_2 = -\frac{1}{2}(-2 - x_3) = \cdots = 1 + \frac{1}{2}t$

C: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 = \cdots = -\frac{3}{2}t$

<u>Poznámka:</u> zpětné dosazení (jak to budeme dělat)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \cdots$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r3:=2r3+r2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \to$$

b) zpětné dosazení: poslední rovnici není možno splnit, soustava nemá řešení

Gaussova eliminační metoda

<u>Poznámka:</u> Gaussova eliminace (jak to budeme dělat)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r3:=2r3+r2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

b) zpětné dosazení

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + x_2 & = & 1 & \rightarrow & \mathrm{C} \\ -2x_2 & = & -2 & \rightarrow & \mathrm{B} \rightarrow \ldots \rightarrow \text{soustava nemá řešení} \\ 0x_2 & = & -4 & \rightarrow & \mathrm{A} \end{array}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= \quad 1 \\ x_1 - \quad x_2 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 &= \quad 5 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2-r1} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r3:=r3+2r2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

b) zpětné dosazení

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= \ \ 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{C} \\ -2x_2 &= -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{B} \\ 0x_2 &= \ \ 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} \end{aligned}$$

A: splněno vždy

B: … $x_2 = 1$

C: … $x_1 = 0$

Gaussova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r1 \leftrightarrow r2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r3:=r3-r1]{r2:=r2}$$ ... (domácí cvičení)

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Princip:

- ✓ (nejen) čtvercové matice soustavy
- ✓ dvě fáze
  - ✓ Gaussova metoda (*dopředné eliminace*)
  - ✓ pokračování v Gaussových úpravách zdola nahoru (*Jordanovy zpětné eliminace*) s cílem „vyrobit“ nuly i nad diagonálou (matice soustavy)

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \downarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Jordan}} \uparrow \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Poznámka:

- ✓ výrazně zjednodušené vyjádření neznámých
- ✓ nelze ovšem provést vždy v plném rozsahu

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení

a) Gaussovy (dopředné) eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

b) Jordanovy zpětné eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r2:=3r2+r3]{r1:=3r1+r3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{-6} & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r1:=2r1+r2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & \mathbf{-6} & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

c) vyjádření neznámých („zpětné dosazení“)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & = & -12 & \rightarrow & x_1 & = & -2 \\ -6x_2 & = & -10 & \rightarrow & x_2 & = & 5/3 \\ -3x_3 & = & -4 & \rightarrow & x_3 & = & 4/3 \end{array}$$

jiný způsob – „dokončení“ Jordanovy zpětné eliminace (jedničky místo nenulových prvků na diagonále)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r1:=r1/6 \\ r2:=r2/(-6) \\ r3:=r3/(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right)$$

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Příklad:

Zadání

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\
x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\
x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Řešení

a) Gaussovy (dopředné) eliminace

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right)
$$

b) Jordanovy zpětné eliminace

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\ ]{\substack{r1:=3r1+r3 \\ r2:=3r2+r3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -16 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -7 & -4 \end{array}\right) \to \ldots
$$

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -4 & | & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -16 & | & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1:=2r1+r2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -24 & | & -12 \\ 0 & -6 & 0 & -16 & | & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r3:=r3/(-3)]{\substack{r1:=r1/6 \\ r2:=r2/(-6)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 & | & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & | & 4/3 \end{pmatrix}$$

c) vyjádření neznámých („zpětné dosazení“)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 & | & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & | & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 - 4x_4 &= -2 \\ x_2 + \tfrac{8}{3}x_4 &= \tfrac{5}{3} \\ x_3 + \tfrac{7}{3}x_4 &= \tfrac{4}{3} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2 + 4t \\ x_2 &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{8}{3}t \\ x_3 &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{7}{3}t \end{aligned} \xrightarrow{t=3s} \begin{aligned} x_1 &= -2 + 12s \\ x_2 &= \tfrac{5}{3} - 8s \\ x_3 &= \tfrac{4}{3} - 7s \end{aligned} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

Poznámka:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 8/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} t$$

4. SLAR v $\mathbb{C}^n$

SLAR v $\mathbb{C}^n$

Definice:

*soustava **m** lineárních algebraických rovnic o **n** neznámých (v $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$)*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\ldots\\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$a_{ij}, b_j, x_i \in \mathbb{C}$$

Poznámka:

Funguje vše probrané pro případ $\mathbb{R}^n$ (části 1 – 3).

SLAR v $\mathbb{C}^n$: doplněk – komplexní čísla

Definice:

algebraický tvar komplexního čísla

- $z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z, \;\; y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$ (*imaginární jednotka*)

operace s komplexními čísly (v algebraickém tvaru)

- $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$
- $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\overline{x + iy} = x - iy$
- $\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{\overline{x_2+iy_2}}{\overline{x_2+iy_2}} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \cdots = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Pozorování:

- $x_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2$

Konec lekce 1.