3 NÁHODNÁ VELIČINA

Čas ke studiu kapitoly: 80 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- obecně popsat náhodnou veličinu pomocí distribuční funkce
- charakterizovat diskrétní i spojitou náhodnou veličinu
- porozumět funkci intenzity potuch
- určovat číselné charakteristiky náhodné veličiny
- transformovat náhodnou veličinu

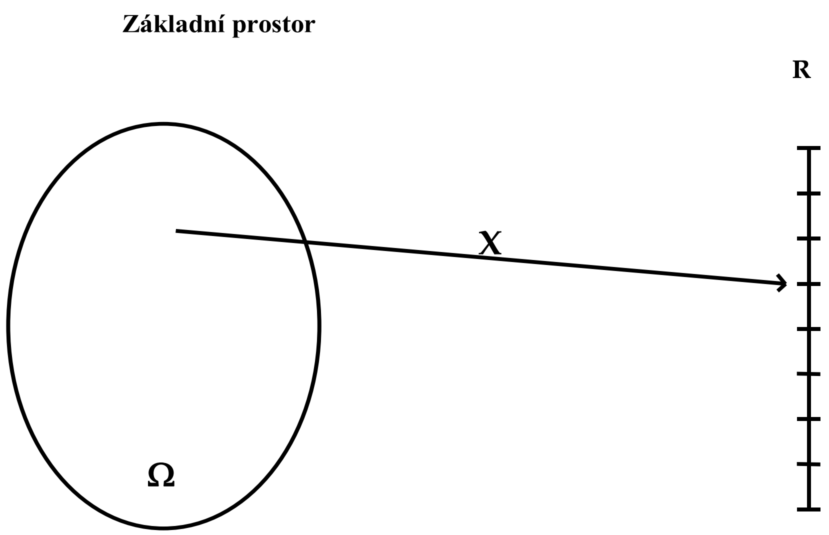
Výklad:

3.1 Definice náhodné veličiny

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, S, P) . **Náhodná veličina X** je reálná funkce X(ω) prvků $\omega \in \Omega$ ze základního prostoru. taková, že pro každé reálné x ($x \in R$) je množina $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega < x)\} \in S$, tj. náhodným jevem. Tedy náhodná veličina je zobrazení $X : \Omega \rightarrow R$ takové, že pro každé $x \in R$ platí:

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega < x)\} \in S$$

Z definice plyne, že pro libovolné $x \in R$ můžeme určit pravděpodobnost toho, že $X(\omega) < x$.



Množina všech hodnot $\{x = X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ se nazývá **základní soubor**.

Průvodce studiem:

Pro ty z Vás, kteří nemají rádi matematické definice, zkusíme vysvětlit pojem náhodná veličina ještě jiným způsobem. Výsledkem náhodného pokusu je v mnoha případech reálné číslo (doba do poruchy, příjem státního zaměstnance, počet žáků v 1. třídě ...). Pak je možno říci, že **náhodnou veličinou** nazveme takový výsledek náhodného pokusu, který je dán reálným číslem.

Náhodné veličiny (NV) budeme označovat velkými písmeny z konce abecedy (např. X, Y, Z nebo X_1, X_2, ...). Jejich konkrétní realizace pak malými písmeny (x, y, z nebo x_1, x_2, ...).

Příklad:

Náhodná veličina X ... Počet dětí ženy starší 18-ti let (obecně)

x = 2 ... Počet dětí jedné konkrétní ženy (konkrétní realizace NV X)

Výklad:

Jedním z úkolů teorie pravděpodobnosti je vybudovat matematický aparát, který přiřadí všem zajímavým podmnožinám množiny reálných čísel **R** příslušné pravděpodobnosti.

3.2 Distribuční funkce

Definice:

Nechť X je náhodná veličina. Reálnou funkci *F(t)* definovanou pro všechna reálná *t*, $t \in R$ vztahem:

$$F(t) = P\{X \in (-\infty, t)\} = P(X < t)$$

nazveme **distribuční funkcí** náhodné veličiny X.

Distribuční funkce je tedy funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než toto reálné číslo.

Distribuční funkce má řadu vlastností, které vyplývají přímo z její definice:

1. Distribuční funkce je <u>nezáporné číslo menší nebo rovno jedné</u>: $0 \le F(x) \le 1$
2. Distribuční funkce je <u>neklesající</u>, tj. $\forall\, x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$,
3. Distribuční funkce F(x) je <u>zleva spojitá</u>
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1; \ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
5. $\forall\, a, b \in R; a < b: P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
6. $P(X = x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} F(x) - F(x_0)$

Rozlišujeme dva základní druhy náhodné veličiny - **spojitou** (může nabývat hodnot z nějakého intervalu) a **diskrétní** (může nabývat pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot), přesněji řečeno náhodnou veličinu se spojitým a diskrétním rozdělením.

3.3 Diskrétní náhodná veličina

O diskrétní náhodné veličině hovoříme tehdy, jestliže náhodná veličina nabývá pouze hodnot z nějaké konečné či spočetné množiny. Jedná se nejčastěji o celočíselné náhodné veličiny, např. počet studentů, kteří vstoupili do hlavní budovy VŠB TUO během dopoledne (0,1,2,...), počet členů domácnosti (1,2,3,...), počet dopravních nehod za jeden den na dálnici z Prahy do Brna (0,1,2,...), součet ok při hodu třemi kostkami (3,4,...,18) apod.

Definice:

Budeme říkat, že náhodná veličina **X má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, když:

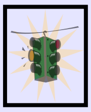
1. $\exists$ konečná nebo spočetná množina reálných čísel M={ $x_1, \dots , x_{n, \dots}$} takových, že $P(X = x_i) > 0 \qquad i = 1, 2, \dots n$
2. $\sum_i P(X = x_i) = 1$

Funkce P(X = x_i) = P(x_i) se nazývá **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny X

Distribuční funkce takového rozdělení je schodovitá se skoky v bodech $x_1, \dots , x_{n, ..}$

Pro distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny platí:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$



Řešený příklad:

Mějme náhodnou veličinu X definovanou jako výsledek hodu klasickou pravidelnou kostkou. Určete typ NV, její pravděpodobnostní a distribuční funkci (zakreslete).

Řešení:

X ... výsledek hodu kostkou

Základní soubor NV X (množina všech možných výsledků): Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Vzhledem k tomu, že základní soubor je tvořen konečně mnoha (šesti) hodnotami, jedná se o **diskrétní NV**

Pravděpodobnostní funkce této NV je uvedena v následující tabulce:

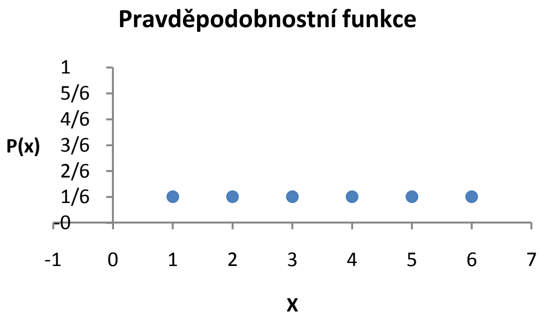
x_i	P(X = x_i)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

(např. P(X=1) čteme: pravděpodobnost, že výsledek hodu kostkou je 1). V tabulce jsou přitom uvedeny pouze **nenulové** hodnoty pravděpodobnostní funkce. Je zřejmé, že platí:

$$\forall\, x_i \in R \setminus \Omega : P(\, X = x_i \,) = 0$$

(např. P(X=1,5)=P(X=-3)= ... = 0). Všimněte si zároveň, že je splněna 2. část definice diskrétní NV : $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$

Na následujícím obrázku pak vidíme grafickou podobu pravděpodobnostní funkce (izolované body).



Dále se pokusíme na základě definice určit distribuční funkci. Z vlastností distribuční funkce vyplývá, že body nespojitosti této funkce jsou ty body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová ($P(X = x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0)$). Proto si určíme hodnoty distribuční funkce na všech intervalech vymezených body nespojitosti.

např.:

$\forall x \in (-\infty;1\rangle : F(x) = P(X < x) = 0$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 1)

$\forall x \in (1;2\rangle : F(x) = P(X < x) = 1/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 2)

$\forall x \in (2;3\rangle : F(x) = P(X < x) = 2/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 3)

....

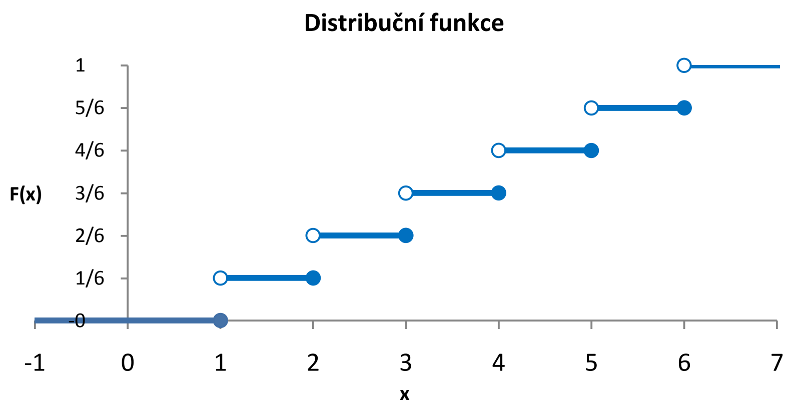
Hodnoty distribuční funkce na celém definičním oboru (R) jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	$F(x_i)$
(-∝;1>	0
(1;2>	1/6
(2;3>	2/6
(3;4>	3/6
(4;5>	4/6
(5;6>	5/6
(6;∝)	1

Na grafu distribuční funkce si všimněte jejich vlastností:

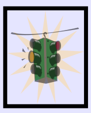
- neklesající
- zleva spojitá

- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1; \ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P(X = x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 +} F(x) - F(x_0)$, tj.:
  - distribuční funkce je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová
  - velikost „skoku“ v bodech nespojitosti je rovna příslušné pravděpodobnosti



3.4 Spojitá náhodná veličina

Jestliže náhodná veličina může nabýt jakékoliv hodnoty z určitého intervalu, hovoříme o náhodné veličině se spojitým rozdělením. Jako příklad lze uvést: životnost výrobku (0, ∞), délku určitého předmětu (0, ∞), náhodně vybrané reálné číslo (-∞, ∞) apod. V takovém případě nelze jednotlivým realizacím náhodné veličiny přiřazovat pravděpodobnostní funkci, poněvadž tato pravděpodobnost je nulová.



Řešený příklad:

Určete jaká je pravděpodobnost, že životnost žárovky bude přesně 253 hodin.

Řešení:

Zkusme hledanou pravděpodobnost najít na základě klasické pravděpodobnosti, tj. jako poměr počtu příznivých možností a počtu všech možností.

X … životnost žárovky

Počet příznivých možností: 1
Počet všech možností: ∞

$$P(X = 253) = "\frac{1}{\infty}" = 0$$

Pravděpodobnost, že životnost žárovky bude přesně 253 hodin je nulová.

Už je Vám jasné proč je pravděpodobnost toho, že nastane libovolná realizace spojité náhodné veličiny, nulová?

Výklad:

Můžeme však stanovit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny v libovolném intervalu. To znamená, že pro její popis můžeme použít distribuční funkci.

- **Distribuční funkce spojité náhodné veličiny**

  je definována takto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad pro \quad -\infty < x < \infty,$$

kde reálnou nezápornou funkci f(x) nazveme hustotou pravděpodobnosti.

- **Hustota pravděpodobnosti**

je definována jako:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x},$$

tj. jako limita pravděpodobnosti, že veličina X padne do intervalu (x; x+Δx), vydělená délkou tohoto intervalu v případě, že se tato délka blíží nule.

Pro hustotu pravděpodobnosti platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Důkaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} F(t) = 1$$

Dá se ukázat, že ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Známe-li tedy distribuční funkci, můžeme lehce určit hustotu pravděpodobnosti a naopak, známe-li hustotu pravděpodobnosti, snadno většinou spočítáme distribuční funkci.

3.4.1 Pravděpodobnost výskytu spojité NV v nějakém intervalu

Jaký je tedy vztah mezi pravděpodobnosti výskytu spojité NV v nějakém intervalu a distribuční funkci (popř. hustotou pravděpodobnosti)?

Distribuční funkce v bodě x je definována jako pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než x (že náhodná veličina leží v intervalu (-∞; x).

$$F(x) = P(X < x) = P\{X \in (-\infty; x)\}$$

Z této definice plyne, že $\forall a,b \in R$:

1. $P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

2. $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$

3. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Jelikož pro spojitou náhodnou veličinu platí, že $P(X = x) = 0$, můžeme dále tvrdit, že:

4. $P(X = x) = 0$

5. $P(X \leq a) = P(X < a)$

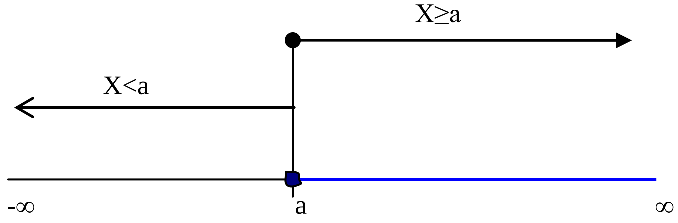
6. $P(X \geq a) = P(X > a)$

7. $P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$

Důkazy:

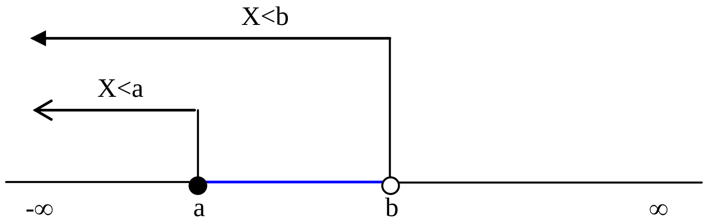
1. plyne z definice distribuční funkce (obecně a speciálně pro spojitou NV)

2. $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$ (jev $(X < a)$ je negací jevu $(X \geq a)$)



$$P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

3. $P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$



4. plyne z definice spojité NV – distribuční funkce spojité NV je spojitá funkce a proto $P(x = x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 +} F(x) - F(x_0) = 0$

5. $P(x = a) = 0$, $P(X \le a) = P(X = a) + P(X < a) = P(X < a)$

6. $P(x = a) = 0$, $P(X \ge a) = P(X = a) + P(X > a) = P(X > a)$

7. $P(x = a) = 0, P(X = b) = 0$,
$P(a \le X < b) = P(X = a) + P(X = b) + P(a < X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b)$

3.4.2 Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobnosti a hustotou pravděpodobnosti

Připomeňme si (viz. geometrická interpretace integrálu), že integrál z křivky je vlastně velikost plochy pod touto křivkou. Víme že pro hustotu pravděpodobnosti platí, že:

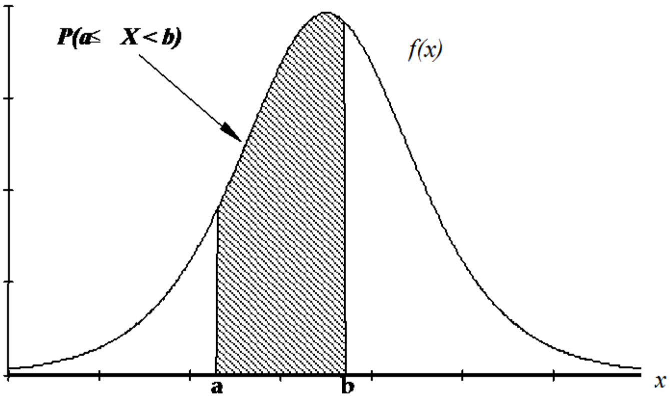
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Je tedy zřejmé, že obsah celé plochy pod křivkou *f(x)* dává dohromady jedničku. To je analogické situaci u diskrétní náhodné veličiny, kde součet pravděpodobností všech možných výsledků rovněž dával jedničku.

Zároveň jsme si ukázali, že:

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

A proto můžeme říci, že obsah plochy pod křivkou *f(x)* pro $x \in < a; b)$ je pravděpodobnost, že X nabude hodnoty z tohoto intervalu ($\forall a, b \in R$).



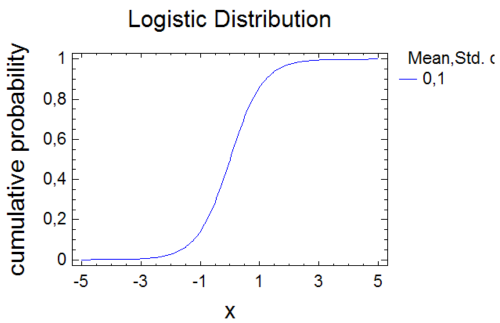
Obdobně můžeme znázornit pravděpodobnosti:

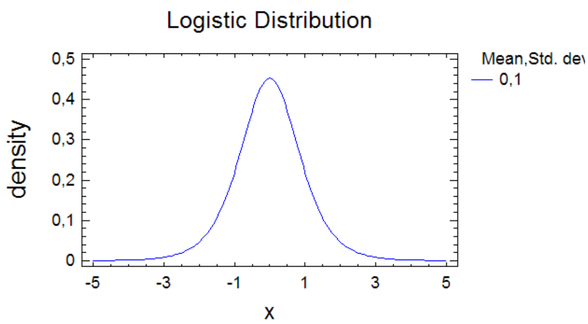
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,, \qquad P(X \geq a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

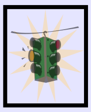
Příklad

Logistické rozdělení pravděpodobnosti má následující distribuční funkci *F(x)* a hustotu pravděpodobnosti *f(x):*

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x)}} \qquad f(x) = \frac{\beta_1\, e^{-(\beta_0+\beta_1 x)}}{(1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x)})^2}$$







Řešený příklad:

Nechť Y je spojitá proměnná definována hustotou pravděpodobnosti:

$$f(y) = \begin{matrix} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

a) nalezněte konstantu c,
b) zakreslete f(y)
c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci F(y),
d) určete: P(0<Y<1), P(Y>0,5), P(Y=0,3)

Řešení:

a) pro nalezení konstanty c využijeme toho, že: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} c(1-t^2)dt + \int_{1}^{\infty} 0dt = 1$$

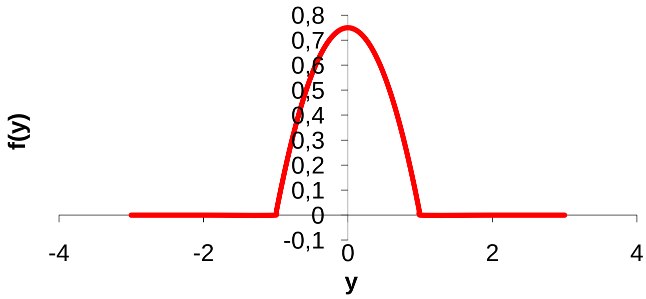
$$0 + c\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = 1$$

$$c\left[(1-\frac{1}{3}) - (-1 - \frac{(-1)}{3})\right] = 1$$

$$c.\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{3}{4} = 0{,}75}}$$

b) $$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{cases}$$

Hustota pravděpodobnosti

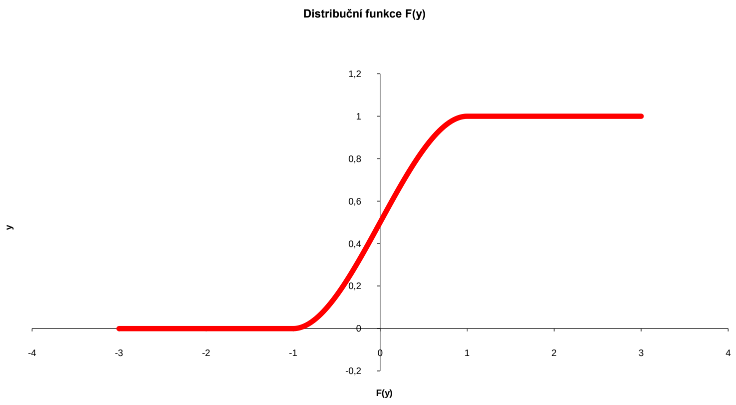


c) Distribuční funkci určíme z definice: $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt \qquad pro \quad -\infty < y < \infty$

Pro $-\infty < y < -1$: $\quad \underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{y} 0dt = \underline{\underline{0}}$

Pro $-1 \le y < 1$: $\quad \underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{y} \frac{3}{4}(1-t^2)dt = 0 + \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{y} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2)}}$

Pro $1 \le y < \infty$: $\quad \underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-t^2)dt + \int_{1}^{y} 0dt = 0 + \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{\underline{1}}$



d) Pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny Y na určitém intervalu určíme pomocí příslušných vztahů:

- $\underline{\underline{P(0<Y<1)}} = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{4}(0+0+2) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sim 50\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y>0{,}5)}} = 1 - F(0{,}5) = 1 - \frac{1}{4}(-(\frac{1}{2})^3 + 3.\frac{1}{2} + 2) = 1 - \frac{27}{32} = \underline{\underline{\frac{5}{32} \sim 15{,}6\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y=0{,}3)=0}}$

Výklad:

3.5 Intenzita poruch

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením definujeme pro F(t)≠1 (tj. F(t)<1) **intenzitu poruch λ(t)** :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

Představuje-li náhodná veličina X **dobu do poruchy** nějakého zařízení, pak intenzita poruch vyjadřuje, že pokud do času *t* nedošlo k žádné poruše, tak pravděpodobnost, že k ní dojde v následujícím okamžiku malé délky Δt, je přibližně $\lambda(t).\Delta t$:

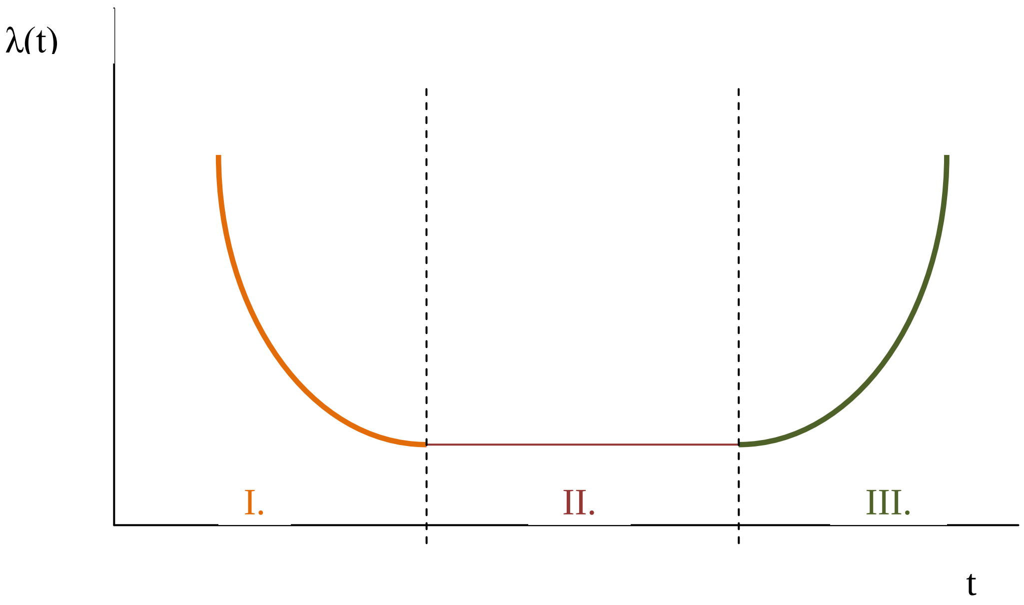
$$P(t < X \leq t + \Delta t | X > t) \approx \frac{f(t)}{1-F(t)} \Delta t = \lambda(t).\Delta t$$

Vzájemné převody mezi $f(t), F(t), \lambda(t)$ udává následující tabulka:

	F(t)	**f(t)**	$\lambda(t)$
F(t)	$F(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
f(t)	$\frac{dF(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\lambda(t)$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{1-\int_0^t f(x)dx}$	$\lambda(t)$

3.5.1 Jak vypadá nejčastější grafická interpretace intenzity poruch ?

Pokud zůstaneme u představy, že náhodná veličina X popisuje **dobu do poruchy** nějakého zařízení, pak typický tvar intenzity poruch je zobrazen na následujícím obrázku.



Křivka na tomto obrázku se nazývá **vanová křivka** a obvykle se dělí na tři úseky (I, II, III).

I. V prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá období časných poruch (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvětšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu, nebo při výrobě apod.

II. Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, či stabilního života.

III. Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastřádané otřesy výrobku z období II (analogie s nesprávnou životosprávou člověka), trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.

3.6 Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Rozdělení pravděpodobnosti každé náhodné veličiny X je plně popsáno pomocí její distribuční funkce F(x), popř. podle hustoty pravděpodobnosti f(x). V mnoha případech je však výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti této náhodné veličiny a rovněž umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny X.** Nyní se seznámíme s některými z nich.

- **Momenty rozdělení**

Obecný moment r-tého řádu μ_r' značíme $\mu_r' = EX^r$ (r = 0,1,2, …)

pro diskrétní NV: $\mu_r' = \sum_{(i)} x_i^r . P(x_i)$ r = 0,1,2,....

pro spojitou NV: $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} x.^r f(x) dx$ r = 0,1,2, …

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

Centrální moment r-tého řádu μ_r značíme $\mu_r = E(X - EX)$ (r = 0,1,2,...)

pro diskrétní NV: $\mu_r' = \sum_{(i)} (x - EX)^r . P(x_i)$ r = 0,1,2...

pro spojitou NV: $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX).^r f(x) dx$ r = 0,1,2, …

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

- **Střední hodnota (expected value)**

Střední hodnota NV je definována jako první obecný moment. Značí se **EX** nebo **μ.**

pro diskrétní NV: $EX = \mu = \sum_{(i)} x_i . P(x_i)$

pro spojitou NV: $EX = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x) dx$

Vlastnosti střední hodnoty:

1. $E(aX+b) = aEX + b \qquad \forall a,b \in R$
   (tj. násobíme-li k X konstantou, násobí se jí i její střední hodnota; přičteme-li k X konstantu, zvýší se o tuto konstantu i její střední hodnota)

2. $E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$
   (tj. střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot)

3. $X_1, X_2 .... nezávislé\ NV \Rightarrow E(X_1.X_2) = E(X_1).E(X_2)$
   (tj. jsou-li NV X_1, X_2 nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jednotlivých středních hodnot)

4. $(Y = g(X);$ g(X) spojitá f-ce) $\Rightarrow EY = E(g(X))$

pro diskrétní NV Y: $\qquad EY = \sum_i g(x_i)\,.\,P(X = x_i)$

pro spojitou NV Y: $\qquad EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).f(x)\,dx$

- **Rozptyl (disperze, variance)**

Rozptyl je druhým centrálním momentem, charakterizuje šířku rozdělení a značí se **DX**, popř. $\boldsymbol{\sigma^2}$.

$$DX = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Důkaz výše uvedeného tvrzení je založen na vlastnostech střední hodnoty.

pro diskrétní NV: $DX = \sum_{(i)} x_i^2.P(x_i) - \left(\sum_{(i)} x_i\,.P(x_i)\right)^2$

pro spojitou NV: $DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\ .f(x)dx\right)^2$

Vlastnosti rozptylu:

1. $D(aX+b) = a^2 DX, \quad \forall a \in R$
   (tj. násobíme-li náhodnou veličinu konstantou, hodnota jejího rozptylu se vynásobí druhou mocninou této konstanty; přičteme-li k náhodné veličině konstantu, její rozptyl se nezmění)

2. $X_1, X_2 ... nezávislé\ NV \Rightarrow D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$
   (tj. jsou-li NV X_1, X_2 nezávislé, pak rozptyl jejich součinu je roven součinu jednotlivých rozptylů)

- **Směrodatná odchylka (standard deviation)**

Směrodatná odchylka je definována jako odmocnina z rozptylu a značí se $\boldsymbol{\sigma_x}$.

$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

- **Šikmost (skewness)**

Je mírou symetrie daného rozdělení pravděpodobnosti, značí se $\mathbf{a_3}$ a je definována jako:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

Symetrii rozdělení (vzhledem k symetrii normovaného normálního rozdělení) pak posuzujeme takto:

$a_3 = 0$ … symetrické rozdělení
$a_3 < 0$ .... negativně zešikmený soubor
$a_3 > 0$ .... pozitivně zešikmený soubor

- **Špičatost (kurtosis)**

Je mírou špičatosti (plochosti) rozdělení, značí se $\mathbf{a_4}$ a je definována jako:

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$$

Špičatost rozdělení (vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení) pak posuzujeme takto:

$a_4 = 3$ .... normální špičatost (tj. špičatost normálního rozdělení)
$a_4 < 3$ .... menší špičatost než u normálního rozdělení (plošší)
$a_4 > 3$ .... větší špičatost než u normálního rozdělení (špičatější)

Vzhledem k nepraktickému vyhodnocování špičatosti (vzhledem ke 3) se mnohdy používá tzv. standardizovaná špičatost, která je definována jako:

$$a_4 - 3$$

a špičatost rozdělení je pak posuzována vzhledem k hodnotě 0.

- **Kvantily**

Značí se x_p a jsou definovány obdobně jako v exploratorní analýze dat.

pro diskrétní NV: většinou nelze jednoznačně určit

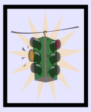
pro spojitou NV: $\forall p \in \langle 0;1 \rangle : \quad F(x_p) = p$

- **Modus**

Značí se $\hat{x}$ a je definován odlišně pro diskrétní a spojitou NV.

pro diskrétní NV: hodnota, pro kterou platí: $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i), \quad i = 1,2,...$
(tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)

pro spojitou NV: hodnota, pro kterou platí: $f(\hat{x}) \geq f(x) \quad pro \ -\infty < x < \infty$
(tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)



Řešený příklad:

Vraťme se k dříve definované diskrétní náhodné veličině X – hod kostkou. V jednom z výše řešených příkladu jsme si určili a zakreslili její pravděpodobnostní i distribuční funkci.

x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

x_i	$F(x_i)$
(-∞;1>	0
(1;2>	1/6
(2;3>	2/6
(3;4>	3/6
(4;5>	4/6
(5;6>	5/6
(6;∞)	1

Nyní určeme:

a) střední hodnotu
b) rozptyl
c) směrodatnou odchylku
d) medián
e) modus

Řešení:

a) $$\underline{\underline{EX}} = \mu = \sum_{(i)} x_i .P(x_i) = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

b) $$DX = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_{(i)} x_i^2 P(x_i) = 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6} = \frac{91}{6} \cong 15{,}2$$

$$\underline{\underline{DX}} = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \underline{\underline{\frac{105}{36} \cong 2{,}9}}$$

c) $\underline{\underline{\sigma_x}} = \sqrt{DX} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{105}}{6} \cong 1{,}7}}$

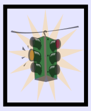
d) $x_{0,5}$=?

$F(x_i) = 0{,}5 \Leftrightarrow x_i \in (3;4\rangle$

$\underline{\underline{x_{0,5}}} = \sup\{(3;4\rangle\} = \underline{\underline{4}}$ (ověření: platí, že 50% hodnot náhodné veličiny je ≤ 4)

e) modus je hodnota, pro kterou platí: $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i), \quad i = 1,2,...$
(tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)

Protože v našem případě nabývá NV X všech hodnot se stejnou pravděpodobností, jedná se o **vícemodální rozdělení** s mody {1;2;3;4;5;6}.



Řešený příklad:

A nyní najdeme vybrané číselné charakteristiky pro spojitou náhodnou veličinu. Zvolme si náhodnou veličinu Y definovanou takto:

$$f(y) = \begin{matrix} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

Určete:

a) střední hodnotu
b) rozptyl
c) směrodatnou odchylku
d) medián
e) modus

Řešení:

Nejdříve bychom museli určit konstantu c ze vztahu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$

My využijeme toho, že daný problém jsme již výše řešili a můžeme proto přímo převzít výsledek, že c=0,75.

a) $\underline{\underline{EY}} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} y.f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y.0dy + \int_{-1}^{1} y.\frac{3}{4}(1-y^2)dy + \int_{1}^{\infty} y.0dy = 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{\underline{0}}$
(výsledek byl očekávatelný, protože hustota pravděpodobnosti NV Y je sudá funkce)

b) $DY = EY^2 - (EY)^2$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2.f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y^2.0dy + \int_{-1}^{1} y^2.\frac{3}{4}\left(1-y^2\right)dy + \int_{1}^{\infty} y^2.0dy = 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} + 0 =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{DY}} = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{5} = 0{,}2}}$$

c) $\underline{\underline{\sigma_y}} = \sqrt{DY} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5} \cong 0{,}45}}$

d) $F(y_{0,5}) = 0{,}5$

Znovu využijeme toho, že jsme s touto náhodnou veličinou pracovali již dříve a bez opětovného výpočtu použijeme znalosti distribuční funkce F(y).

$$F(y) = \begin{cases} 0 & pro\ y < (-1) \\ \frac{1}{4}\left(-y^3 + 3y + 2\right) & pro\ (-1) \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y > 1 \end{cases}$$

Ze vztahu pro distribuční funkci je zřejmé, že medián může být pouze hodnota z intervalu (-1;1):

$$\frac{1}{4}\left(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2\right) = 0{,}5$$

$$\left(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2\right) = 2$$

$$-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} = 0$$

$$y_{0,5}\left(-y_{0,5}^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{y_{0,5_1} = 0}} \\ y_{0,5_2} = \sqrt{3} \notin (-1;1) \\ y_{0,5_3} = -\sqrt{3} \notin (-1;1) \end{array}$$

e) modus je hodnota, pro kterou platí: $f(\hat{x}) \ge f(x) \quad pro\ -\infty < x < \infty$

(tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)

Pro maximum funkce platí, že první derivace v něm musí být nulová (nebo nedefinována) a druhá derivace v něm musí být záporná.

Je zřejmé, že rovněž modus budeme hledat na intervalu (-1;1):

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$\left[\frac{3}{4}\left(1 - y^2\right)\right]' = 0$$

$$\frac{3}{4}(0 - 2y) = 0$$

$$y = 0 \ldots bod\ \ podezřelý\ \ z\ \max ima$$

Zda se jedná o maximum bychom mohli ověřit z druhé derivace f(y), ale my využijeme opět toho, že jsme s danou NV pracovali a pohledem na graf f(y) si ověříme, že hustota pravděpodobnosti f(y) skutečně nabývá svého maxima v bodě 0.

$$\underline{\underline{\hat{y} = 0}}$$

Výklad:

3.7 Funkce náhodné veličiny

Definujme náhodnou veličinu *Y = g(X)*, kde *g(x)* je nějaká prostá reálná funkce definovaná na základním souboru náhodné veličiny X. Odvodíme rozdělení náhodné veličiny Y: distribuční funkci *H(y)* a hustotu *h(y)*, jestliže známe rozdělení náhodné veličiny X: dána distribuční funkce *F(x)* a hustota *f(x)*.

$$H(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) \qquad \text{pro každé } -\infty < y < \infty$$

Jestliže k funkci *g* existuje funkce inverzní g^{-1}, pak platí:

$$H(y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y)) = F(g^{-1}(y)) \qquad \text{pro } g \text{ rostoucí a}$$

$$H(y) = P(g(X) < y) = P(X > g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F(g^{-1}(y)) \quad \text{pro } g \text{ klesající.}$$

Pro spojitou náhodnou veličinu *X* a spojitě diferencovatelnou funkci *g* je hustota *h(y)* náhodné veličiny *Y* rovna:

$$h(y) = f(g^{-1}(y)).\left|\frac{d\ g^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Řešený příklad:

Nechť náhodná veličina W je definována jako lineární transformace náhodné veličiny Y.

$$f(y) = \begin{matrix} 0{,}75(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

$$W = 5Y + 6$$

Nalezněte:
a) distribuční funkci G(w) náhodné veličiny W
b) hustotu pravděpodobnosti g(w) náhodné veličiny W,
c) střední hodnotu EW náhodné veličiny W
d) rozptyl DW náhodné veličiny W.

Řešení:
Stejně jako v předchozích případech využijeme toho, že jsme již s NV Y pracovali (v opačném případě bychom museli nejdříve najít F(y), EY a DY).

$$F(y) = \begin{matrix} 0 & pro\ y < (-1) \\ \frac{1}{4}\left(-y^3 + 3y + 2\right) & pro\ (-1) \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y > 1 \end{matrix} \quad ,\ EY = 0,\ DY = 0{,}2$$

a) $\underline{\underline{G(w)}} = P(W < w) = P(5Y + 6 < w) = P(Y < \frac{w-6}{5}) = \underline{\underline{F(\frac{w-6}{5})}}$

Nyní určíme distribuční funkci G(w) tak, že do předpisu pro distribuční funkci F(y) dosadíme za y výraz $\left(\frac{w-6}{5}\right)$.

$$G(w) = \begin{matrix} 0 & pro\left(\frac{w-6}{5}\right) < -1 \\ \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{w-6}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{w-6}{5}\right) + 2\right) & pro\ -1 \le \left(\frac{w-6}{5}\right) \le 1 \\ 1 & pro\left(\frac{w-6}{5}\right) > 1 \end{matrix}$$

$$G(w) = \begin{cases} 0 & pro\ w < 1 \\ -\frac{1}{500}(w^3 - 18w^2 + 33w - 16) & pro\ 1 \le w \le 11 \\ 1 & pro\ w > 11 \end{cases}$$

b) Hustotu pravděpodobnosti určíme jako derivaci distribuční funkce:

$$g(w) = \frac{dG(w)}{dw}$$

$$g(w) = \begin{cases} -\frac{1}{500}(3w^2 - 36w + 33) & pro\ 1 \le w \le 11 \\ 0 & pro\ (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

po úpravě:

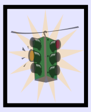
$$g(w) = \begin{cases} -\frac{3}{500}(w^2 - 12w + 11) & pro\ 1 \le w \le 11 \\ 0 & pro\ (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

c) Z vlastností střední hodnoty plyne, že:

$$\underline{\underline{EW}} = E(5Y + 6) = 5.EY + 6 = 5.0 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

d) Z vlastností rozptylu plyne, že:

$$\underline{\underline{DW}} = D(5Y + 6) = 5^2.DY = 25.0{,}2 = \underline{\underline{5}}$$



Řešený příklad:

Nechť náhodná veličina X má spojitou rostoucí distribuční funkci F(x). Najděte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y = F(X).

Řešení:

Y = F(x)

- F(x) nabývá pro $x \in R$ hodnot z intervalu <0;1> $\Rightarrow$ náhodná veličina Y nabývá rovněž hodnot z intervalu <0;1> $\Rightarrow$

$$pro\ y < 0 \ldots H(y) = 0$$
$$pro\ y > 1 \ldots H(y) = 1$$

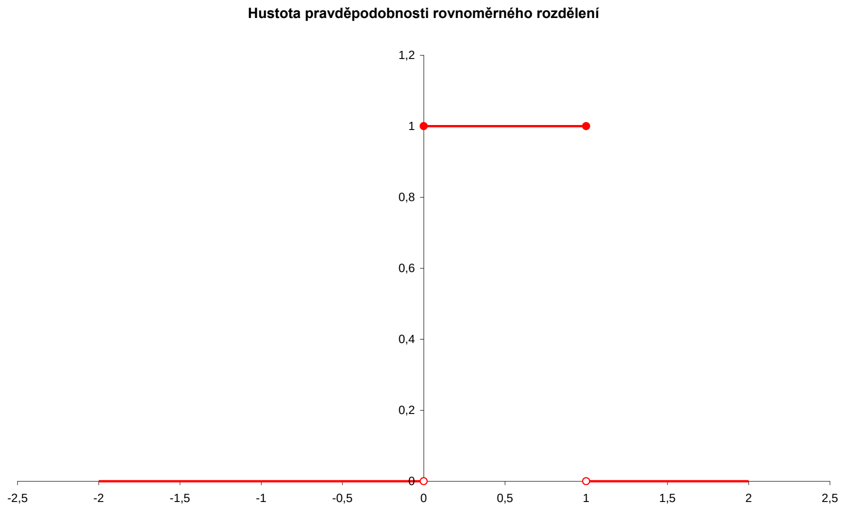
$$pro\ 0 \le y \le 1 \ldots\ H(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

$$H(y) = \begin{cases} 0 & pro\ y < 0 \\ y & pro\ 0 \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y > 1 \end{cases}$$

- Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny *Y*

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & pro\ y \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$



Náhodná veličina Y má tzv. **rovnoměrné** (rektangulární) **rozdělení v intervalu <0, 1>** .

Shrnutí:

Náhodná veličina je veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu (je-li tento výsledek dán reálným číslem). Jde o reálnou funkci definovanou na základním prostoru a charakterizovanou distribuční funkci.

Distribuční funkce je definována jako F(x) = P(X<x), jde tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo.

Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu určujeme na základě těchto vztahů:

$$P(X < a) = F(a)$$
$$P(X \geq b) = 1 - F(b)$$
$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Podle toho, jakých může náhodná veličina nabýt hodnot (resp. z jakého intervalu), rozlišujeme spojitou a diskrétní náhodnou veličinu, přesněji řečeno náhodnou veličinu se **spojitým a diskrétním rozdělením**.

Diskrétní náhodná veličina je náhodnou veličinou, která může nabývat pouze konečného nebo spočetně nekonečného množství hodnot (např. výsledek hodu kostkou) Diskrétní náhodnou veličinu popisujeme prostřednictvím **pravděpodobnostní funkce**, popř. distribuční funkce.

Spojitá náhodná veličina je náhodnou veličinou, která může nabývat všech hodnot z libovolného konečného nebo nekonečného intervalu (např. životnost zářivky) Pro popis spojité náhodné veličiny používáme distribuční funkci, **hustotu pravděpodobnosti** a v případě, že jde o nezápornou spojitou náhodnou veličinu používáme také **intenzitu poruch**. Intenzita poruch má pro většinu výrobků z technické praxe charakteristický tvar vanové křivky.

V mnoha případech je výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti náhodné veličiny, případně umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny.** Mezi základní číselné charakteristiky řadíme např. **střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, kvantily, modus, šikmost** a **špičatost**.

V případě, že *g(x)* je nějaká prostá reálná funkce, definovaná na základním souboru náhodné veličiny X, můžeme snadno odvodit rozdělení **transformované náhodné veličiny** *Y = g(X)*.

Otázky

1. Popište zavedení náhodné veličiny pomocí distribuční funkce, včetně nejvýznamnějších vlastností této funkce.
2. Jaký je vzájemný vztah mezi distribuční funkcí a pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny ?
3. Jaký je vzájemný vztah mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny ?
4. Co je to intenzita poruch a jak se dá vyjádřit pomocí distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti ? Jaký je její charakteristický tvar ?
5. Které obecné a centrální momenty znáte ? Co je to medián a modus ?
6. Odvoďte předpis pro distribuční funkci náhodné veličiny Y, je-li tato náhodná veličina definovaná jako $Y=g(X)$, kde g je prostá reálná funkce definovaná na základním prostoru náhodné veličiny X.

Úlohy k řešení

1. Náhodná veličina X je dána součtem počtu ok při dvou hodech klasickou hrací kostkou. Určete pro danou náhodnou veličinu:
   a) pravděpodobnostní funkci
   b) distribuční funkci
   c) střední hodnotu
   d) rozptyl

2. Nechť náhodná veličina Z je definována takto:

$$f(z) = \frac{1}{\left(1+e^{z}\right)\left(1+e^{-z}\right)} \qquad -\infty < z < \infty$$

   Nalezněte distribuční funkci náhodné veličiny Z.

3. Bod je náhodně vybrán z koule o poloměru R. Náhodnou veličinu X definujme jako vzdálenost tohoto bodu od počátku. Určete pro danou náhodnou veličinu:
   a) distribuční funkci
   b) hustotu pravděpodobnosti
   c) střední hodnotu
   d) rozptyl

4. Strana krychle má rovnoměrné rozdělení na intervalu <0;2>. Určete distribuční funkci objemu krychle.

5. X je spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Určete $P(1 \le |X| \le 2)$.

6. Spojitá náhodná veličina X je definovaná hustotou pravděpodobnosti f(x):

$$f(x) = \begin{matrix} 2(1-x) & \quad \mathit{pro}\ x \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & \quad \mathit{jinde} \end{matrix}$$

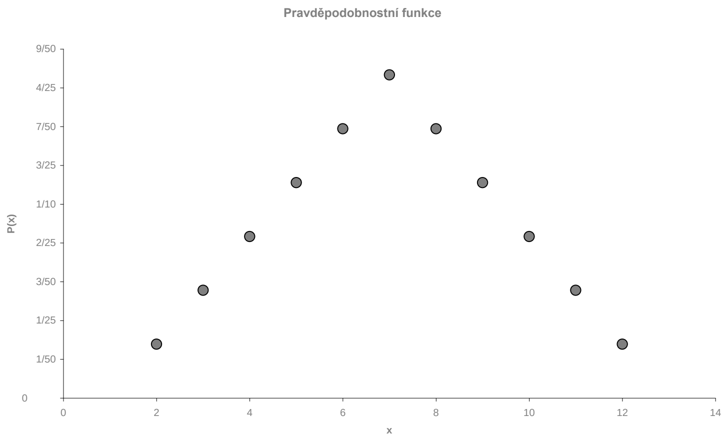
   Určete 100α%-ní kvantil x_α a medián. Určete pravděpodobnost P(X>0,5), P(X=0,4)

Řešení:

1. X … diskrétní NV

a)

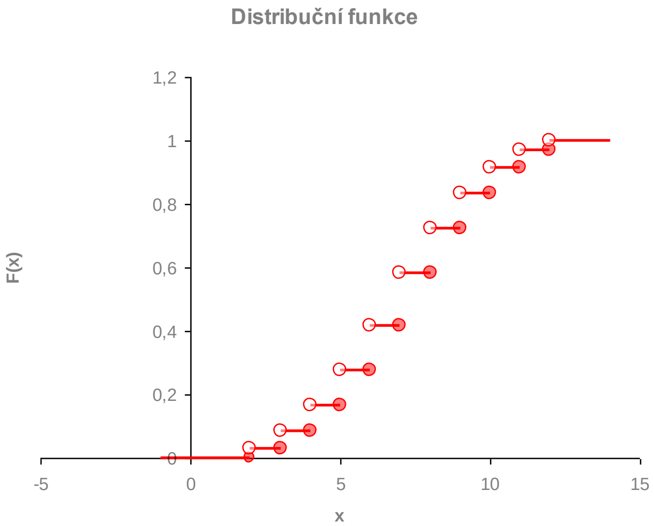
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x_i)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



b)

x_i	(-∞;2>	(2;3>	(3;4>	(4;5>	(5;6>	(6;7>
F(x_i)	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36

x_i	(7;8>	(8;9>	(9;10>	(10;11>	(11;12>	(12;∞)
F(x_i)	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1



d) $EX = 7$

e) $DX = 210/36 \cong 5{,}83$

2. $F(z) = \dfrac{e^z}{1+e^z}$

3. X … spojitá NV

a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \in (-\infty;0) \\ \dfrac{x^3}{R^3} & pro\ x \in \langle 0;R \rangle \\ 1 & pro\ x \in (R;\infty) \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{R^3} & pro\ x \in \langle 0;R \rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

c) $EX = \dfrac{3R}{4}$

d) $DX = \dfrac{3R^2}{80}$

4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \in (-\infty;0) \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2} & pro\ x \in \langle 0;8 \rangle \\ 1 & pro\ x \in (8;\infty) \end{cases}$$

5. $P(1 \le |X| \le 2) = e^{-1} - e^{-2}$

6. $x_\alpha = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, $x_{0,5} = 0{,}293$, $P(X > 0{,}5) = 0{,}25$, $P(X = 0{,}4) = 0$